L'Hypothèse Généralisée du Continu Revisitée

Laura Fontanella

Paris (France), 18 juillet 2010

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Lorsqu'on fixe notre attention sur les lois de l'arithmétique des cardinaux infinis on trouve que l'addition et la multiplication sont "triviales" au sens que

$$\lambda + \mu = \lambda \cdot \mu = \max\{\lambda, \mu\},$$

si λ et μ sont des cardinaux infinis. Par suite, les vraies inconnues de l'arithmétique cardinale sont l'opération 2^λ et l'exponentiation cardinale λ^μ, pour λ, μ deux cardinaux infinis. On sait grâce à Cantor que quelque soit λ un cardinal infini, 2^λ est un cardinal strictement supérieure à λ. Or, on ne connait pas de moyens de passer de λ à un cardinal $\mu > \lambda$ mais tel que $\mu < 2^\lambda$. Il était, donc, tout à fait naturel de penser que la valeur de 2^λ devait bien être λ^+. Cohen montra en 1963 ([**?**]) que ce n'est pas le cas, c'est à dire l'hypothèse du continu est indépendante de la théorie des ensembles. Sous l'hypothèse du continu l'exponentiation cardinale dévient également "triviale" car on aurait :

$$\lambda^\mu = \begin{cases} \lambda^+ & \text{si } cf(\lambda) \leq \mu < \lambda \\ \max\{\lambda, \mu^+\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, le fait qu'on ne puisse pas déterminer la valeur de 2^λ et de λ^μ pour λ, μ cardinals infinis laisse ouverte la question : *quelles sont les lois de l'arithmétique cardinale ?*

C'est précisement sur cette question qu'on veut concentrer l'attention du lecteur. Bien que les premières tentatives pour la résoudre aient produits des résultats d'indépendance, l'arithmétique des cardinaux constitue un domaine de la théorie des ensembles contemporaine dans lequel les théorèmes de ZF sont abondants. L'hypothèse généralisée du continu revisitée est l'un de ces théorèmes.

Il s'agit d'une version faible de GCH, formulée et démontrée par S.Shelah (voir [?]). Souvent, la façon dont les mathématiques se développent consiste à avancer des hypothèses puis à reformuler ces hypothèses originales si elles se révelent fausses ou indémontrables. Ainsi, on pouvait espèrer pouvoir sauver une partie de GCH en montrant que pour "presque tout" cardinal λ, $2^\lambda = \lambda^+$, mais Foreman et Woodin ont montré la cohérence relative de l'énoncé "$2^\lambda > \lambda^+$, pour tout λ'' (voir [?]).

Or, comme on l'a déjà dit, l'opération 2^λ et l'exponentiation cardinale sont les vraies inconnues de l'arithmétique cardinale. A ce propos il existe une forme équivalente de GCH qui met l'accent sur l'exponentiation cardinale :

$$\text{pour tout } \kappa < \lambda \text{ réguliers, } \lambda^\kappa = \lambda. \tag{1.1}$$

On va reformuler l'opération λ^κ en une autre qui lui est liée, qu'on note $\lambda^{[\kappa]}$. Puis on montrera que , donc GCH, équivaut à :

$$\text{pour tout } \kappa < \lambda \text{ réguliers, } \lambda^{[\kappa]} = \lambda. \tag{1.2}$$

Ainsi formulée, GCH est susceptible d'être affaiblie. L'hypothèse généralisée du continu revisitée est, en effet, le théorème suivant :

Théorème 1.0.1 *Si μ est un cardinal fortement limite et non dénombrable, alors pour tout $\lambda \geq \mu$ il existe $\kappa_0 < \mu$ tel que pour tout $\kappa \in [\kappa_0, \lambda)$, $\lambda^{[\kappa]} = \lambda$.*

1.1 L'exponentiation cardinale revisitée

Les récents travaux de Shelah nous montrent comment en déplaçant l'attention des opérations usuelles à des notions plus subtiles on peut obtenir des résultats surprenants. On a vu, en particulier, que l'exponentiation usuelle est strictement liée aux récouvrements de $[\lambda]^k$ (voir [?]). On garde ce lien pour la définition de $\lambda^{[\kappa]}$.

Définition 1.1.1 *On dit que $P \subseteq [\lambda]^\theta$ est une $< \sigma$-base pour $[\lambda]^\theta$ si tout $u \in [\lambda]^\theta$ est l'union d'au plus σ éléments de P. C'est à dire, pour tout $u \in [\lambda]^\theta$, il existe $P_0 \subseteq P$ tel que $|P_0| < \sigma$ et $u = \bigcup P_0$.*

Définition 1.1.2 *Pour κ régulier $\kappa < \lambda$ on définit $\lambda^{[\kappa]}$ comme suit :*

$$\lambda^{[\kappa]} = \min\{|P|;\ P \textit{ est une } < \kappa\textit{-base pour } [\lambda]^\kappa\ \}.$$

Dans la suite on se reférera à l'opération λ^κ comme à l'*exponentiation revisitée*. On va explorer le lien entre l'exponentiation revisitée et l'exponentiation cardinale usuelle pour montrer, ensuite, l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

$$\text{pour tout } \kappa < \lambda \text{ réguliers, } \lambda^\kappa = \lambda \tag{1.3}$$

$$\text{pour tout } \kappa < \lambda \text{ réguliers, } \lambda^{[\kappa]} = \lambda. \tag{1.4}$$

Notons, avant tout, que $\lambda^{[\kappa]} \leq \lambda^{\kappa}$ car si P est une $< \kappa$-base pour $[\lambda]^{\kappa}$ de cardinal $\lambda^{[\kappa]}$ alors $P \subseteq [\lambda]^{\kappa}$, donc $\lambda^{[\kappa]} = |P| \leq |[\lambda]^{\kappa}| = \lambda^{\kappa}$.

Notons aussi que si $\kappa < \lambda$, alors $\lambda^{[\kappa]} \geq \lambda$: en effet, si on fixe une $< \kappa$-base P de cardinal $\lambda^{[\kappa]}$, alors $\lambda \subseteq \bigcup P$ car pour tout $\alpha \in \lambda$ il existe $P_0 \subset P$ tel que $\kappa \cup \{\alpha\} = \bigcup P_0 \subset \bigcup P$, donc $\lambda \leq |\bigcup P| = \max\{\lambda^{[\kappa]}, \kappa\}$.

Lemme 1.1.3 $\lambda^{\kappa} = (\lambda^{[\kappa]})^{<\kappa}$.

Preuve. Soit P une κ-base pour $[\lambda]^{\kappa}$ de cardinal $\lambda^{[\kappa]}$. Pour tout $u \in [\lambda]^{\kappa}$ on fixe $P_u \in [P]^{<\kappa}$ tel que $u = \bigcup P_u$. La fonction $u \mapsto P_u$ est une fonction injective de $[\lambda]^{\kappa}$ sur $[P]^{<\kappa}$ donc $\lambda^{\kappa} = |[\lambda]^{\kappa}| \leq |[P]^{<\kappa}| = (\lambda^{[\kappa]})^{<\kappa} \leq (\lambda^{\kappa})^{<\kappa} = \lambda^{\kappa}$. ■

Théorème 1.1.4 *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1.)*GCH : pour tout $\kappa < \lambda$ réguliers, $\lambda^{\kappa} = \lambda$;*

(2.)*pour tout $\kappa < \lambda$ réguliers, $\lambda^{[\kappa]} = \lambda$.*

Preuve. Puisque $\lambda^{[\kappa]} \leq \lambda^{\kappa}$, il est évident que (1.) implique (2.). L'autre sens se montre par récurrence : on fixe $\kappa < \lambda$ régulier on suppose par hypothèse d'induction que pour tout $\mu < \kappa$, régulier $\lambda^{\mu} = \lambda$. D'après le Lemme **??** et l'hypothèse (2.), on a $\lambda^{\kappa} = (\lambda^{[\kappa]})^{<\kappa} = \lambda^{<\kappa}$. Or, $\lambda^{<\kappa} = \bigcup_{\mu<\kappa} \lambda^{\mu}$ et par l'hypothèse d'induction, $\bigcup_{\mu<\kappa} \lambda^{\mu} = \lambda$. Ce qui nous permet de conclure que $\lambda^{\kappa} = \lambda$. ■

Pour une preuve que GCH équivaut à pour tout $k < \lambda$ réguliers, $\lambda^{k} = \lambda$ consulter [**?**].

L'Hypothèse Généralisée du Continu Revisitée est le Théorème suivant :

Théorème 1.1.5 *Si μ est un cardinal fortement limite et non dénombrable, alors pour tout $\lambda \geq \mu$ il existe $\kappa_0 < \mu$ tel que pour tout $\kappa \in [\kappa_0, \lambda)$, $\lambda^{[\kappa]} = \lambda$.*

1.2 Préliminaires : rappels sur la théorie PCF

Il existe deux preuve de l'hypothèse généralisée du continu revisitée (voir [**?**]) : l'une utilise les *ultrapowers*, l'autre est une preuve sans forcing pour laquelle on se sert de la Théorie PCF. On va présenter la deuxième des deux démonstrations. Cette section contient les principaux définitions et résultats de la Thèorie Pcf dont on aura besoin dans la suite. Le lecteur qui est à l'aise avec cette théorie peut passer directement à la section suivante. Pour plus de détails le lecteur peut consulter [?], [?] ou [?].

Soit F un filtre sur un ensemble A, R une relation sur les ordinaux. Pour tout $f, g \in^A Ord$, on définit :

$$fR_Fg \text{ ssi } \{i \in A; f(i)Rg(i)\} \in F.$$

Parfois on utilise cette notation pour les idéaux plutôt que pour les filtres donc si I est un idéal sur A alors :

$$fR_Ig \text{ ssi } \{i \in A; \neg(f(i)Rg(i))\} \in I.$$

On note $<$ la rélation sur ${}^AOrd$ définie par $f < g$ ssi $f(a) < g(a)$, pour tout $a \in A$. Si $C \subseteq^A Ord$, alors $\sup C$ est la fonction définie par : $\sup C(a) = \sup\{f(a); f \in C\}$.

On dit qu'un filtre F sur A est propre si $F \neq \mathscr{P}(A)$ et on dit que F est trivial quand $F = \{A\}$. Similairement, un idéal I sur A est propre si $I \neq \mathscr{P}(A)$ et I est trivial si $I = \{\emptyset\}$. Si I est un idéal sur A, $I^* = \{X \subseteq A; A \setminus X \in I\}$ est le filtre dual et on note $I^+ = \{X \subseteq A; X \notin I\}$. Si F est un filtre sur A, on définit aussi $F^* = \{X \subseteq A; A \setminus X \in F\}$ l'idéal dual de F. Un filtre F est κ-complet si pour tout $F_0 \subseteq F$ tel que $|F_0| < \kappa$, on a $\bigcap F_0 \in F$. Un idéal I est κ-complet si pour tout $I_0 \subseteq I$ tel que $|I_0| < \kappa$, on a $\bigcup I_0 \in I$.

Si $h : A \to Ord$, alors $\Pi h = \{f \in^A Ord; \forall a \in A(f(a) \in h(a))\}$. Soit $(P, <_D)$ un ensemble partiellement ordonné on dit que $C \subseteq P$ est D-cofinal (ou que C est cofinal dans $P, <_D$) si $\forall p \in P \exists q \in C(p <_D q)$. On définit :

$$\mathrm{cof}(P, <_D) = \min\{|C|; C \subseteq P \text{ cofinal dans } P, <_D\}.$$

Si $P, <_D$ admet un sous ensemble C qui est D-cofinal dans P et totalment ordonné, alors on dit que P a la vraie cofinalité et on définit :

$$\mathrm{tcf}(P, <_D) = \min\{|C|; C \text{ est } D\text{-cofinal dans } P \text{ et totalement ordonné}\}.$$

L'expression $\mathrm{tcf}(P, <_D) = \lambda$ (ou $\mathrm{tcf}(P/D)$) signifie : P a la vraie cofinalité et $\mathrm{tcf}(P, <_D) = \lambda$. Si $h : A \to Ord$ alors $\mathrm{tcf}(\Pi h, <_D) = \lambda$ peut se lire aussi : il existe une suite $\vec{f} = \langle f_\xi; \xi \in \lambda \rangle$ $<_D$-croissante et D-cofinale dans Πh.

Pour A un ensemble de cardinaux réguliers on définit :

$$\mathrm{pcf}(A) = \{\lambda; \exists U \text{ un ultrafiltre sur } A \text{ tel que } \mathrm{tcf}(\Pi A, <_U) = \lambda\}.$$

Lemme 1.2.1 *Si A est un ensemble de cardinaux réguliers, alors* $\mathrm{cof}(\Pi A, <) = \sup \mathrm{pcf}(A)$.

Plus précisement, dans le lemme précedent $\sup \mathrm{pcf}(A) = \max \mathrm{pcf}(A)$, ce résultat se montre à l'aide d'un idéal que l'on va définir maintenant.

Soit $\{B_\lambda; \lambda \in \mathrm{pcf}(A)\}$ une famille de sous ensembles de A. On dit qu' elle est une *famille de générateurs* pour $\mathrm{pcf}(A)$ si pour tout $\lambda \in \mathrm{pcf}(A)$, on a :
1. $\max \mathrm{pcf}(B_\lambda) = \lambda$;
2. pour tout ultrafiltre D sur A, $\mathrm{tcf}(\Pi A, <_D) = \min\{\lambda; B_\lambda \in D\}$.

Soit $\{B_\lambda; \lambda \in \mathrm{pcf}(A)\}$ une famille de générateurs pour $\mathrm{pcf}(A)$. On définit $J_\kappa[A]$ comme étant l'idéal engendré par $\{B_\lambda; \lambda < \kappa$ et $\lambda \in \mathrm{pcf}(A)\}$.

Lemme 1.2.2 *Si A est un ensemble de cardinaux réguliers, alors* $\max \mathrm{pcf}(A)$ *existe.*

On peut montrer que :

Lemme 1.2.3 *Si A est un ensemble de cardinaux réguliers, F un filtre sur A et $\{B_\lambda; \lambda \in \mathrm{pcf}(A)\}$ une famille de générateurs pour* $\mathrm{pcf}(A)$. *Si* $\mathrm{tcf}(\Pi A/F)$ *existe, alors*

$$\mathrm{tcf}(\Pi A/F) = \min\{\lambda; B_\lambda \in F\}.$$

De même, on peut définire l'idéal $J_\lambda[A]$ de la façon suivante :

$$J_\lambda[A] = \{X \subseteq A; \mathrm{pcf}(X) \subseteq \lambda\}$$

On a aussi la carattérisation suivante :

Lemme 1.2.4 *Pour tout $X \subseteq A$, $X \in J_\lambda[A]$ ssi pour tout filtre F sur A, si $X \in F$ et* $\mathrm{tcf}(\Pi A/F)$ *existe, alors* $\mathrm{tcf}(\Pi A/F) < \lambda$.

Schéma de la preuve : $(\rightarrow)$ si $X \in J_\lambda[A]$, alors soit F un filtre sur A tel que $X \in F$ et $\mathrm{tcf}(\Pi A/F)$ existe. Soit $D = \{Y \cap X; Y \in F\}$. D est un filtre sur X contenant F. Puisque $\mathrm{tcf}(\Pi A/F)$ existe, $\mathrm{tcf}(\Pi X/D)$ existe aussi et $\mathrm{tcf}(\Pi A/F) = \mathrm{tcf}(\Pi X/D) < \lambda$. $(\leftarrow)$ soit $X \subseteq A$ tel que pour tout filtre F sur A, si $X \in F$ et $\mathrm{tcf}(\Pi A/F)$ existe, alors $\mathrm{tcf}(\Pi A/F) < \lambda$. Montrons $\mathrm{pcf}(X) \subseteq \lambda$: soit D un ultrafiltre sur X et soit F le filtre sur A engendré par D. Alors $\mathrm{tcf}(\Pi A, F)$ existe et $X \in F$ donc, par l'hypothèse, $\mathrm{tcf}(\Pi A, F) < \lambda$. Or, $\mathrm{tcf}(\Pi X/D) = \mathrm{tcf}(\Pi A/F)$, d'où le resultat.

1.3 Cofinalités possibles et filtres σ-complets

Dans cette section σ est un cardinal régulier et A un ensemble de cardinaux réguliers.

Définition 1.3.1 *On définit $J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ par la formule :*

$$X \in J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A] \text{ ssi } X \subseteq A \text{ et pour tout filtre } \sigma - complet\ F \text{ sur } A \text{ tel que}$$

$$X \in F \text{ et } \mathrm{tcf}(\Pi A/F) \text{ existe, on a } \mathrm{tcf}(\Pi A/F) < \lambda.$$

Informellement on peut dire que les éléments de $J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ "forcent" ΠA à avoir vraie cofinalité $< \lambda$ modulo un filtre σ-complet.

De façon équivalente on a

$$J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A] = \{X \subseteq A; \mathrm{pcf}_{\sigma-com}(X) \subseteq \lambda\}$$

où

$$\mathrm{pcf}_{\sigma-com}(X) = \{\lambda; \exists D \text{ un filtre } \sigma\text{-complet sur } X \text{ tel que } \mathrm{tcf}(\Pi X/D) = \lambda\}.$$

La preuve est la même que pour le Lemme **??**. Il est evident, alors, que $J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ et $J_\lambda[A]$ sont strictement liés. On va montrer, en effet, que $J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ est la σ-complétude de $J_\lambda[A]$.

Lemme 1.3.2 *$J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ est un idéal σ-complet.*

Preuve. Soit $\{X_i; i < \mu\} \subseteq J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ où $\mu < \sigma$. On veut montrer que $X = \bigcup_{i<\mu} X_i \in J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$. Soit F un filtre σ-complet contenant X tel que $\mathrm{tcf}(\Pi A/F)$ existe et vaut τ, on montre $\tau < \lambda$. Si F est non propre, alors $\mathrm{tcf}(\Pi A/F) = 1$. Sinon, pour tout $i < \mu$ soit $F_i = \{B \subseteq A; \exists B_0 \in F(B_0 \cap X_i \subseteq B)\}$. Il n'est pas possible que F_i soit non propre pour tout $i < \mu$, car cela voudrait dire que $X \setminus X_i \in F$ pour tout $i < \mu$, donc $\emptyset = \bigcap_{i<\mu} X \setminus X_i \in F$, ce qui contredirait l'hypothèse F est propre. Par conséquent, il existe $i < \mu$ tel que F_i est propre. Alors F_i est un filtre σ-complet qui contient X_i et tel que $\mathrm{tcf}(\Pi A/F_i) = \tau$. Par définition de $J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ on a donc $\tau < \lambda$. ∎

Lemme 1.3.3 *$J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ est la σ-complétude de $J_\lambda[A]$ c'est à dire pour tout $X \subseteq A$, $X \in J_{<\lambda}^{\sigma-com}[A]$ ssi X est l'union de $< \sigma$ éléments de $J_\lambda[A]$.*

Preuve. Soit J la σ-complétude de $J_\lambda[A]$. D'après le Lemme **??**, il suffit de montrer $J^{\sigma-com}_{<\lambda}[A] \subseteq J$. On suppose pour l'instant que $\lambda = \max \mathrm{pcf}(A)$. D'après le Lemme **??** on a $\mathrm{tcf}(\Pi A/J_\lambda[A]) = \mathrm{tcf}(\Pi A/J^*_\lambda[A]) = \min\{\eta; B_\eta \notin J^*_\lambda[A]\} \geq \lambda = \max \mathrm{pcf}(A) \geq \mathrm{tcf}(\Pi A/J_\lambda[A])$, c'est-à-dire $\mathrm{tcf}(\Pi A/J_\lambda[A]) = \lambda$. Soit $X \in J^{\sigma-com}_{<\lambda}[A]$, et soit J' la σ-complétude de $J_\lambda[A] \cup \{A \setminus X\}$. Si, par l'absurde, $X \notin J$ alors $X \notin J'$ donc J' est un idéal propre σ-complet et contenant $A \setminus X$. Or, $X \in J^{\sigma-com}_{<\lambda}[A]$ et $X \in J'^*$ donc, par définition, on a $\mathrm{tcf}(\Pi A/J') = \mathrm{tcf}(\Pi A/J'^*) < \lambda$ mais $\mathrm{tcf}(\Pi A/J') = \mathrm{tcf}(\Pi A/J_\lambda[A]) = \lambda$, contradiction.
On veut maintenant se dispenser de l'hypothèse $\lambda = \max \mathrm{pcf}(A)$. On montre par induction sur μ que pour tout ensemble de cardinaux réguliers B tel que $\mu = \max \mathrm{pcf}(B)$, pour tout cardinal λ, σ avec σ régulier $J^{\sigma-com}_{<\lambda}[B]$ est la σ-complétude de $J_\lambda[B]$. Soit $X \in J^{\sigma-com}_{<\lambda}[B]$. On peut supposer $\mu \geq \lambda$ car si $\mu < \lambda$, alors $X \in J_\lambda[B]$ (en effet $J_\lambda[B] = \{Y \subseteq A; \mathrm{pcf}(Y) \subseteq \lambda\}$). Par conséquent, $X \in J^{\sigma-com}_{<\mu}[B]$ donc, par ce qu'on vient de montrer, X est l'union de $< \sigma$ éléments de $J_{<\mu}[B]$, disons $X = \bigcup_{i<\sigma'} X_i$ où $\sigma' < \sigma$. Pour tout $i < \sigma'$, $\max \mathrm{pcf}(X_i) < \mu$ donc par l'hypothèse d'induction $J^{\sigma-com}_{<\lambda}[X_i]$ est la σ-complétude de $J_\lambda[X_i] \subseteq J_\lambda[B]$. Par suite, chaque X_i est union de $< \sigma$ éléments de $J_\lambda[B]$. Puisque σ est régulier alors X est bien l'union de $< \sigma$ éléments de $J_\lambda[B]$. ■

On avait $\mathrm{cof}(\Pi X, <) < \lambda$, pour tout $X \in J_\lambda[A]$ (voir la section Préliminaires), on prétend maintenant que les éléments de $J^{\sigma-com}_{<\lambda}[A]$ ont une propriété similaire.

Définition 1.3.4 *Soit B un ensemble de cardinaux réguliers et soit $C \subseteq \prod B$. On dit que C est $< \sigma$-cofinal dans ΠB ssi il existe $C_0 \subseteq C$ tel que $|C_0| < \sigma$ et $f < \sup C_0$, pour tout $f \in \Pi B$.*

Définition 1.3.5 *Soit B un ensemble de cardinaux réguliers, on définit*

$$< \sigma - \mathrm{cof}(\Pi B) = \min\{|C|;\ C \text{ est } < \sigma\text{-cofinal dans } \Pi B\ \}.$$

Remarque 1.3.6 *Supposons que $C \subseteq \Pi B$ est $< \sigma$-cofinal et $\sigma = \max B$. Alors il existe $C_0 \subseteq C$, pour tout $f \in \Pi B$, tel que $|C_0| < \sigma$ et $f < \sup C_0$. Puisque σ est régulier, alors, $\sup C_0 : B \to \sigma$ donc $\sup C_0 \in PiB$. Ca veut dire que, plus que $< \sigma$-cofinal, C est* cofinal *dans ΠB. Pour que la définition soit intéressnate, donc, il faut que $\sigma \leq \min B$.*

Lemme 1.3.7 *Si $\sigma \leq \min(A), cf(\lambda)^+$, alors pour tout $X \in J^{<\sigma-com}_{<\lambda}[A]$, $< \sigma - \mathrm{cof}(\Pi X) < \lambda$.*

Preuve. Soit $J = \{X \subseteq A; < \sigma - \mathrm{cof}(\Pi X) < \lambda\}$. Pour tout $X \in J_\lambda[A]$, $< \sigma - \mathrm{cof}(\Pi X) \leq cf(\Pi X) < \lambda$ donc $J_\lambda[A] \subseteq J$. Si on montre que J est un idéal σ-complet, grâce au Lemme **??**, on aurait $J^{\sigma-com}_{<\lambda}[A] \subseteq J$. Soit $\{X_i\}_{i<\sigma'}$ avec $\sigma' < \sigma$ une famille d'ensembles de J et soit $X = \bigcup_{i<\sigma'} X_i$. Pour tout $i < \sigma'$ on fixe $P_i \subseteq X_i$ $<\sigma$-cofinal dans ΠX_i de cardinal $< \lambda$. Soit $P = \bigcup_{i<\sigma'} P_i$, on a $|P| < \lambda$ car $\sigma < cf(\lambda)$. Si on étend les fonctions de P de façon arbitraire on obtient un ensemble $P' \subseteq \Pi X$ de même cardinal que P. La preuve est terminée si on montre que P est $<\sigma$-cofinal dans ΠX : soit $f \in \Pi X$ et soit pour tout $i < \sigma'$, $f_i = f\restriction X_i$. Il existe $C_i \subseteq P_i$ tel que $|C_i| < \sigma$ et $f < \sup C_i$, on pose $g_i = \sup C_i$. On étend les fonctions g_i de façon arbitraire et on obtient de fonction $g_i^* \in P$. Il est clair que $f < \sup_{i<\sigma'} g_i^*$, d'où la conclusion. ■

1.4 L'ensemble $T_D(f)$

Soient κ un cardinal, D un filtre sur κ, et $f \in^\kappa Ord$. On dit que $F \subseteq \Pi f$ est une famille de fonctions deux-à-deux D-différentes si pour tout $g, h \in F$, $g \neq_D h$.

Supposons que $\mathrm{tcf}(\Pi f/D)$ existe et vaut λ alors il existe une suite $<_D$-croissante (strictement) de longueur λ donc une famille de cardinal λ de fonctions deux-à-deux D-différentes.

Définition 1.4.1 *Soit $f \in^\kappa Ord$, on définit :*

$T_D(f) = \sup\{|F|; F \subseteq \Pi f$ *est une famille de fonctions deux-à-deux D-différentes*$\}$.

Il est evident d'après la remarque initiale que si $\mathrm{tcf}(\Pi f/D)$ existe, alors $T_D(f) \geq \mathrm{tcf}(\Pi f/D)$. On va montrer que si $\mathrm{tcf}(\Pi f/D)$ existe, alors il existe $g \leq_D f$ tel que $T_D(g) = \mathrm{tcf}(\Pi f/D)$.

D'abord on montre le suivant :

Lemme 1.4.2 *Soient κ un cardinal, D un filtre sur κ et $f \in {}^\kappa Ord$. Si $2^\kappa < T_D(f)$, alors* $\max T_D(f)$ *existe.*

Preuve. On va montrer que toute famille maximale de fonctions de Πf deux-à-deux D-différentes a cardinal $\lambda = T_D(f)$. Supposons par l'absurde qu'il existe une famille $F \subseteq \Pi f$ maximale de fonctions deux-à-deux différentes tel que $|F| < \lambda$. Soit $G \subseteq \Pi f$ une famille de fonctions deux-à-deux D-différentes tel que $|G| > |F| + 2^\kappa$. Puisque F est maximale, pour tout $g \in G$ on peut trouver $f_g \in F$ tel que $E_g = \{i \in \kappa; f_g(i) = g(i)\} \notin D^*$. Or, $|G| > |F| + 2^\kappa$, donc il existe $g_1 \neq g_2 \in G$ tel que $f_{g_1} = f_{g_2}$ et $E_{g_1} = E_{g_2}$. Mais cela signifie que $\{i \in \kappa; g_1(i) = g_2(i)\} \notin D^*$, ce qui contredit $g_1 \neq_D g_2$. ■

Lemme 1.4.3 *Soit σ un cardinal régulier non dénombrable et D un filtre σ-complet sur κ. Soit $f \in {}^{\kappa}Ord$ et $T_D(f) \geq \lambda$ où $2^\kappa < \lambda$. Alors il existe $g \leq_D f$ tel que $T_D(g) = \lambda$.*

Preuve. Soit $g \leq_D f$ minimale au sens de $\leq_D$ tel que $T_D(g) \geq \lambda$. Supposons par l'absurde que $T_D(g) > \lambda$. Il existe une ensemble $\{f_\alpha; \alpha < \lambda^+\}$ de fonctions deux-à-deux D-différents dans Πg. Pour $\alpha < \lambda^+$ on définit $u_\alpha = \{\beta < \lambda^+; f_\beta <_D f_\alpha\}$. S'il existe α tel que $|u_\alpha| \geq \lambda$ alors $T_D(f_\alpha) \geq \lambda$, ce qui contredit la minimalité de g. Par suite, $|u_\alpha| < \lambda$ pour tout $\alpha < \lambda^+$.

FAIT : Il existe $F \subseteq \lambda^+$ de cardinal λ^+ tel que pour tout $\alpha \neq \beta$ dans F, on a $\alpha \notin u_\beta$.

En effet, on peut supposer que pour tout $\beta < \lambda^+$, $u_\beta \subseteq \beta$. Alors, il existe $\lambda_0 < \lambda$ tel que $|u_\alpha| = \lambda_0$ pour λ^+ ordinaux α dans λ^+. Donc on peut supposer que $|u_\alpha| = \lambda_0$ pour tout α (sinon on re-énumère). Soit $S = \alpha < \lambda^+; cf(\alpha) = \lambda_0^+$; pour tout $\alpha \in S$, on a $\sup u_\alpha \cap \alpha < \alpha$ donc par le théorème de Fodor, il existe $F \subseteq S$ de cardinal λ^+ tel que $\sup u_\alpha \cap \alpha = \xi$ pour un $\xi < \lambda^+$, d'où le résultat.

Plus généralement, ce qu'on vient de montrer est une conséquence du théorème suivant dû à A. Hajnal (voir [**?**]).

(Free Mapping) Soient $\mu > \eta$ deux cardinaux tel que μ est infini, et soit $h \in {}^{\mu}Ord$ tel que $|h(x)| < \eta$, pour tout $x \in \mu$. Il existe un ensemble $E \subseteq \mu$ de cardinal μ tel que $E \cap h(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Alors, on a $F \subseteq \lambda^+$ de cardinal λ^+ tel que pour tout $\alpha \neq \beta$ dans F, on a $\alpha \notin u_\beta$. Donc, il existe une suite $\langle f_\alpha; \alpha < (2^\kappa)^+ \rangle$ tel que $f_\alpha \in {}^{\kappa}Ord$ et $f_\alpha \not\leq_D f_\beta$ si $\alpha \neq \beta$. On sait grâce au théorème de Erdös-Rado que $(2^\kappa)^+ \rightarrow (\kappa^+)^2_\kappa$. Pour $\alpha < \beta < \kappa^+$ on définit $h(\alpha, \beta)$ un $i < \kappa$ tel que $f_\beta(i) < f_\alpha(i)$. Alors, h n'a pas d'ensembles homogènes infinis ce qui contredit Erdös-Rado. On en déduit que $T_D(g) = \lambda$. ■

1.5 Prémière étape de la preuve

Pour montrer l'Hypothèse Généralisée du Continu Revisitée on se restreint au cas où θ est un cardinal fortement limite et singulier et on va montrer ce théorème qui implique l'Hypothèse du Continu Revisitée pour un tel θ :

Théorème 1.5.1 *Soit θ un cardinal fortement limite et singulier. Pour tout $\lambda \geq \theta$, il existe $\sigma < \theta$ tel que $\lambda = \lambda^{[\sigma, \leq\theta]}$.*

Le théorème se montre par récurrence sur λ. Si $\sigma_0 = (cf(\theta))^+$ alors deux cas sont possibles :
Cas1 : pour tout $A \subseteq Reg \cap \lambda \setminus \theta$, si $|A| < \theta$, alors $A \in J^{\sigma_0-\mathrm{com}}_{\leq\lambda}[A]$
Cas2 : non Cas1.

Dans les deux sections suivantes on va travailler respectivement sur le premier cas et sur le deuxième. Ainsi on aura traité les deux étapes principales de la preuve de l'Hypothèse Généralisée du Continu Revisitée.

Pour $\lambda > \theta \geq \sigma$ cardinaux, on définit :

$$\lambda^{[\sigma,<\theta]} = \min\{|P|; P \subseteq [\lambda]^{<\theta} \text{ tel que } P \text{ est une } \sigma\text{-base pour } [\lambda]^{<\theta}\}.$$

Théorème 1.5.2 *Soient $\lambda > \theta > \sigma = cf(\sigma) > \aleph_0$ tel que θ est régulier, $\sigma < cf(\lambda)$ et $2^{<\theta} \leq \lambda$. Supposons que $A \in J^{\sigma-com}_{\leq\lambda}[A]$, pour tout $A \in [\lambda]^{<\theta}$ tel que $A \subseteq Reg$ et $\min(A) > \theta$.*
Alors $\lambda = \lambda^{[\sigma,<\theta]}$.

Preuve. On fixe χ assez grand, soit $M \prec H_\chi$ tel que $\lambda + 1 \subseteq M$ et $|M| = \lambda$. On va montrer que $M \cap [\lambda]^{<\theta}$ est une σ-base pour $[\lambda]^{<\theta}$, d'où le résultat.
Soit $u \in [\lambda]^{<\theta}$ et soit $\kappa < \theta$ son cardinal. On fixe une bijection $g : \kappa \to u$. On peut définire par récurrence sur $n \in \omega$ des ensembles $\Phi_n \subseteq {}^\kappa\lambda + 1$ tel que :

- $\Phi_0 = \{f_0\}$ où $f_0 \equiv \lambda$;
- pour tout n, $\Phi_n \subseteq M$ et $|\Phi_n| < \sigma$. Si $f \in \Phi_n$, alors $g \leq f$;
- pour tout $f \in \Phi_n$ et pour tout $a \in \kappa$, si $g(a) < f(a)$ alors il existe $p \in \Phi_{n+1}$ tel que $g(a) \leq p(a) < f(a)$.

On peut voir les éléments des Φ_n comme des approximation de la fonction g, qui sont dans M. L'existence de tels ensembles Φ_n est une conséquance immédiate du Lemme suivant :

Lemme 1.5.3 *(sous les hypothèses du théorème et sur M) Soit $g : \kappa \to \lambda$ une fonction avec $\kappa < \theta$. Pour tout $f : \kappa \to \lambda + 1$ tel que $f \in M$ et $g \leq f$, il existe $\Phi \subseteq M \cap {}^\kappa\lambda$ tel que :*
- $|\Phi| < \sigma$;
- $\forall p \in \Phi(g \leq p \leq f)$;
- $\forall a \in \kappa(g(a) < f(a) \Rightarrow \exists p \in \Phi(g(a) \leq p(a) < f(a)))$.

On suppose pour l'instant que le Lemme ait été montré. On définit $\Phi = \bigcup_{n<\omega} \Phi_n$, alors $|\Phi| < \sigma$. Or, par hypothèse, $2^{<\theta} \leq \lambda$ donc tout sous-ensemble borné de θ est dans M, en particulier tout sous-ensebles de κ est dans M. On en deduit que pour tout $f \in \Phi$, l'ensemble $E_f = \{f(a); a \in \kappa \text{ et } f(a) = g(a)\}$ est dans M ($f, \{a \in \kappa; g(a) = f(a)\} \in M$ donc par remplacement). On a bien $u = \bigcup_{f \in \Phi} E_f$ car pour tout $x \in u$ il existe $a \in \kappa$ tel que $x = g(a)$; il existe $f_{j_1}, ..., f_{j_n}$ tel que $f_{j_i} \in \Phi_{j_i}$ et si $g(a) < f_{j_i}(a)$ alors $g(a) \leq f_{j_{i+1}}(a) < f_{j_i}(a)$. Forcément pour un $m \in \{j_1, ..., j_n\}$, $g(a) = f_m(a)$.

Montrons maintenant le Lemme **??** :
On fixe dans M une suite $\langle C_\eta; \eta \in \lambda + 1 \cap Lim(\lambda)\rangle$ tel que $C_\eta \subseteq \eta$ est un club de type d'ordre $cf(\eta)$. On définit quatre ensembles :

$$E_0 = \{a \in \kappa; g(a) = f(a)\}$$

$$E_1 = \{a \in \kappa; g(a) < f(a) \text{ et } f(a) \text{ est un successur }\}$$

$$E_2 = \{a \in \kappa; g(a) < f(a),\ f(a) \text{ est limite et } cf(f(a)) < \theta\}$$

$$E_3 = \kappa \setminus (E_0 \cup E_1 \cup E_2).$$

Chaque E_i est dans M car tout sous ensemble de κ est dans M. On définit une fonction h comme suit : pour tout $a \in \kappa$ on pose

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in E_0 \\ f(a) - 1 & \text{si } a \in E_1 \\ \min C_{f(a)} \setminus g(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que $h \restriction E_0 \cup E_1 \in M$, on montre que $h \restriction E_2 \in M$ égalment. Par définition $h \restriction E_2 \in \Pi_{a \in E_2} C_{f(a)}$. Mais θ est régulier et puisque $|E_2| < \theta$ et $cf(f(a)) < \theta$, alors $\sup_{a \in E_2} cf(f(a)) < \theta$. Par suite $|\Pi_{a \in E_2} C_{f(a)}| = |\Pi_{a \in E_2} cf(f(a))| = \sup_{a \in E_2} cf(f(a))^{|E_2|} \leq 2^{<\theta} \leq \lambda$. Donc on peut supposer que $\Pi_{a \in E_2} C_{f(a)} \subseteq M$. On en deduit que $h \restriction E_2 \in M$.
Soit $A = \{cf(f(a)); a \in E_3\}$, on a $A \subseteq \lambda + 1 \setminus \theta$ est un ensemble de cardinaux réguliers tel que $|A| \leq \kappa$ donc par l'hypothèse, $A \in J^{\sigma-com}_{\leq \lambda}[A]$. Comme $\sigma \leq cf(\lambda)$ on peut appliquer le Lemme **??** : il existe une famille F qui est $<\sigma$-cofinale dans ΠA et tel que $|F| \leq \lambda$. Puisque $A \in M$, on peut supposer que $F \in M$ et $F \subseteq M$. Comme $\sigma < \min A$ et $A \subseteq Reg$, de F on peut construire une famille $F' \subseteq \Pi_{a \in E_3} C_{f(a)} = P$ qui est $<\sigma$-cofinale dans P (et on peut supposer encore une fois que $F' \in M$ et $F' \subseteq M$). $h \restriction E_3 \in P$ donc il existe $F_0 \subseteq F'$ tel que $|F_0| < \sigma$ tel que $h \restriction E_3 < \sup F_0$. Si $e \in F_0$, alors $e(a) < f(a)$ mais on peut avoir aussi $e(a) < g(a)$ donc on définit :

$$e'(a) = \begin{cases} e(a) & \text{si } g(a) \leq e(a) \\ f(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a bien $e' \in M$ car $e, f \in M$ et tout sous-ensemble de κ est dans M. La famille $\{h\restriction (E_0 \cup E_1 \cup E_2) \frown e'; e \in F_0\}$ convient et le lemme est ainsi démontré. ■

On va montrer, pour conclure la section, que le même résultat s'obtient si $cf(\theta) < \sigma$:

Corollaire 1.5.4 *Soient $\lambda > \theta > \sigma = cf(\sigma) > \aleph_0$ tel que $cf(\theta) < \sigma < cf(\lambda)$ et $2^{<\theta} \leq \lambda$. Supposons que : $A \in J^{\sigma-com}_{\leq\lambda}[A]$, pour tout $A \in [\lambda+1]^{<\theta}$ tel que $A \subseteq Reg$ et $\min(A) > \theta$.*
Alors $\lambda = \lambda^{[\sigma,<\theta]}$.

Preuve. Soit $\langle\theta_i; i < cf(\theta)\rangle$ une suite de cardinaux réguliers cofinale dans θ et tel que $\sigma < \theta_i$ pour tout i. On montre que pour tout $i < cf(\theta)$, les hypothèses du Théorème **??** sont satisfaites pour $\lambda > \theta_i > \sigma$, donc $\lambda = \lambda^{[\sigma,<\theta_i]}$. Cela implique que $\lambda = \lambda^{[\sigma,<\theta]}$: en effet pour tout $i < cf(\theta)$ on fixe P_i de cardinal λ une σ-base pour $[\lambda]^{<\theta_i}$. Alors $P = \bigcup_{i<cf(\theta)} P_i$ est une σ-base pour $[\lambda]^\theta$ de cardinal $\leq \lambda$.

Il faut montrer que si $\theta' < \theta$ est régulier, alors pour tout $A \subseteq Reg \cap \lambda + 1 \setminus \theta'$ si $|A| < \theta$, alors $A \in J^{\sigma-com}_{\leq\lambda}[A]$. Supposons par l'absurde que non, et que pour un filtre σ-complet D sur $A \subseteq Reg \cap \lambda + 1 \setminus \theta'$, on a $\mathrm{tcf}(\Pi A/D) = \lambda_0 > \lambda$. On peut supposer que $A \subseteq \theta$ car sinon : $A \cap \theta \notin D$ donc $A \setminus \theta \notin D^*$, ça voudrait dire que si D' est le filtre engendré par $D \cup \{A \setminus \theta\}$ alors $\mathrm{tcf}(\Pi A, D') = \mathrm{tcf}(\Pi A, D) = \lambda_0 > \lambda$. Mais par l'hypothèse $A \setminus \theta \in J^{\sigma-com}_{\leq\lambda}[A]$, contradiction.

Si pour tout $i < cf(\theta)$, $A \setminus \theta_i \in D$, alors par σ-complétude de D et puisque $cf(\theta) < \sigma$, on a $\emptyset = \bigcap_{i<cf(\theta)} A \setminus \theta_i \in D$, ce qui est absurde. Alors, il existe i tel que $A \cap \theta_i \notin D^*$. Soit D' le filtre engendré par $D \cup \{A \cap \theta_i\}$, alors D' est σ-complet et $\mathrm{tcf}(\Pi A/D') = \mathrm{tcf}(\Pi A/D) = \lambda_0 > \lambda$. Mais c'est impossible car $(\theta_i)^{|A\cap\theta_i|} \leq 2^{<\theta} \leq \lambda$.
■

1.6 Deuxième étape de la preuve

Nous avons définie la notion d'ensemble $<\sigma$-cofinal dans ΠX où $X \subseteq Reg$. On va généraliser cette notion aux sous-ensembles de $[\lambda]^\theta$ pour $\lambda > \theta$ cardinaux.

Définition 1.6.1 *Soient $\lambda > \theta \geq \sigma$ des cardinaux avec σ régulier.*
$P \subseteq [\lambda]^\theta$ est $<\sigma$-cofinal dans $[\lambda]^\theta$ si pour tout $u \in [\lambda]^\theta$, il existe $P_0 \subseteq P$ de cardinal $<\sigma$ tel que $u \subseteq \bigcup P_0$.

Pour $\lambda > \theta \geq \sigma$ avec σ régulier on définit :

$$\lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle} = \min\{|P|; P \subseteq [\lambda]^\theta \text{ est } <\sigma\text{-cofinal dans } [\lambda]^\theta\}.$$

Remarque 1.6.2 *Si $\lambda > \theta \geq \sigma$ avec σ régulier et si $2^\theta \leq \lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle}$, alors $\lambda^{[\sigma,\leq\theta]} = \lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle}$.*

Preuve. Il est évident que $\lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle} \leq \lambda^{[\sigma,\leq\theta]}$, montrons que :

$$\lambda^{[\sigma,\leq\theta]} \leq \lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle} \cdot 2^\theta.$$

Soit $P \subseteq [\lambda]^\theta < \sigma$-cofinale et de cardinal $\lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle}$. Soit P' la cloture de P par sous-ensembles (i.e. $x \in P' \iff \exists y \in P(x \subseteq y)$). Alors $P' \subseteq [\lambda]^{\leq\theta}$ est une $< \sigma$-base en effet : pour tout $u \in [\lambda]^{\leq\theta}$, soit $u' \supseteq u$ dans $[\lambda]^\theta$. Il existe $P_0 \subseteq P$ de cardinal $< \sigma$ tel que $u' \subseteq \bigcup P_0$. Soit $P_1 = \{x \cap u; x \in P_0\}$, on a $u = \bigcup P_1$, $P_1 \subseteq P'$ et $|P_1| < \sigma$. Donc P' est une $< \sigma$-base. Or, $|P'| \leq |P \times \bigcup\{\mathscr{P}(x); x \in P\}| \leq |P| \cdot 2^\theta = \lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle} \cdot 2^\theta$. ■

Nous avons maintenant tous les éléments pour énoncer et démontrer un autre théorème qui est central dans la preuve de l'hypothèse généralisée du continu revisitée.

Théorème 1.6.3 *Soient $\lambda > \theta \geq \sigma = cf(\sigma) > \kappa$ des cardinaux tels que :*
- $\theta^\kappa = \theta$;
- *si $\tau < \sigma$, alors $\tau^\kappa < \sigma$;*
- *J est un idéal sur κ;*
- *il existe une suite $\bar\lambda = \langle\lambda_i; i < \kappa\rangle$, tel que $\lambda_i < \lambda$ et*
- $T_J(\bar\lambda) = \lambda$
- *$\lambda_i^{\langle\sigma,\theta\rangle} = \lambda_i$ pour tout $i < \kappa$.*

Alors $\lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle} = \lambda$.

Preuve. Puisque $T_J(\bar\lambda)$, il existe :
(i.) une suite $\langle f_\alpha; \alpha < \lambda\rangle$ tel que $f_\alpha \in \Pi_{i<\kappa}\lambda_i$ et $\alpha \neq \beta$ implique $f_\alpha \neq_J f_\beta$;
(ii.) une suite $\langle g_\alpha; \alpha < \lambda\rangle$ tel que $g_\alpha \in \Pi_{i<\kappa}\lambda_i$ et pour tout $f \in \Pi_{i<\kappa}\lambda_i$ il existe $\alpha < \kappa$ tel que $f =_{J^+} g_\alpha$.
Pour tout $i < \kappa$ on a $\lambda_i^{\langle\sigma,\theta\rangle} = \lambda_i$ donc on fixe une famille $P_i \subseteq [\lambda_i]^\theta$ de cardinal λ_i qui est $< \sigma$-cofinale dans $[\lambda_i]^\theta$. Le produit $\Pi_{i<\kappa}P_i$ est isomorphe à $\Pi_{i<\kappa}\lambda_i$: par $(ii.)$ il existe une famille $\{g_\alpha; \alpha < \lambda\} \subseteq \Pi_{i<\kappa}P_i$ tel que pour tout $g \in \Pi_{i<\kappa}P_i$ il existe $\alpha < \lambda$ tel que $g =_{J^+} g_\alpha$.
Pour tout $g \in \Pi_{i<\kappa}P_i$ et $A \in J^+$ on note $\Pi g\restriction A = \Pi_{i\in A}g(i)$. On définit $F(g\restriction A) = \{\xi \in \lambda; \forall i \in A(f_\xi(i) \in g(i))\}$. Autrement dit, $F(g\restriction A)$ est l'ensemble des $\xi \in \lambda$ tel que $f_\xi\restriction A \in \Pi g\restriction A$. Observons que si $A \subset B \subseteq \kappa$, alors $F(g\restriction A) \supseteq F(g\restriction B)$.

Pour tout $g \in \Pi_{i<\kappa}P_i$ et $A \in J^+$, on a $|F(g\restriction A)| \leq \theta$: en effet, puisque $g(i) \in P_i \subseteq [\lambda_i]^\theta$, $|\Pi_{i\in A}g(i)| \leq \theta^\kappa = \theta$. Donc, si $|F(g\restriction A)| > \theta$, on devrait avoir $\xi \neq \xi'$ dans λ avec $f_\xi\restriction A = f_{\xi'}\restriction A$. Mais comme $A \in J^+$ ça contredirait $f_\xi \neq_J f_{\xi'}$.

Montrons que la famille $F = \{F(g_\alpha\restriction A); \alpha < \lambda, A \in J^+\}$ est $< \sigma$-cofinal dans $[\lambda]^\theta$. Notons d'abord que, comme $|F| \leq \lambda \cdot 2^\kappa = \lambda$, alors ce résultat suffit pour monter le théorème. Soit $u \in [\lambda]^\theta$ on définit pour tout $i < \kappa$ un ensemble $u_i = \{f_\alpha(i); \alpha \in u\}$. Alors $u_i \in [\lambda_i]^{\leq\theta}$ donc il existe $P_i^u \subseteq P_i$ tel que $|P_i^u| < \sigma$ et $u_i \subseteq \bigcup P_i^u$. Puisque σ est régulier, il existe $\tau < \sigma$ qui borne tous les cardinaux $\sigma_i = |P_i^u|$ et comme $\tau^\kappa < \sigma$ alors on a $|\Pi_{i\in\kappa}\sigma_i| < \sigma$. Par suite, $G = \Pi_{i\in\kappa}P_i^u$ est un sous-ensemble de $\Pi_{i\in\kappa}P_i$ de taille $< \sigma$.

Montrons, maintenant, que $u \subseteq \bigcup\{F(g); g \in G\}$. Si $\xi \in u$, alors $f_\xi(i) \in u_i$ pour tout $i \in \kappa$. C'est-à-dire $f_\xi(i) \in \bigcup P_i^u$ pour tout $i < \kappa$, et on peut trouver $g \in G$ tel que $f_\xi(i) \in g(i)$ pour tout $i < \kappa$. Ca veut dire que $\xi \in F(g)$.

Enfin, on montre que pour tout $g \in G$ il existe $\alpha < \lambda$ et $A \in J^+$ tel que $F(g) \subseteq F(g_\alpha\restriction A)$; c'est-à-dire, comme $|G| < \sigma$, u est contenu dans l'union de $< \sigma$ ensembles de la forme $F(g_\alpha\restriction A)$. En effet, pour tout $g \in G$ il existe $\alpha < \lambda$ tel que $g_\alpha =_{J^+} g$. C'est à dire il existe $A \in J^+$ tel que $g\restriction A = g_\alpha\restriction A$. Nous avons observé déjà que $F(g) \subseteq F(g\restriction A)$, d'où le résultat. ■

On va montrer qu'on obtient le même resultat si on remplace l'hypothèse $\theta^\kappa = \theta$ par θ fortement limite et de cofinalité $< \sigma$.

Corollaire 1.6.4 *Soient $\lambda > \theta > \sigma = cf(\sigma) > \kappa$ des cardinaux tels que :*
- *θ est fortement limite et $cf(\theta) < \sigma$;*
- *si $\tau < \sigma$, alors $\tau^\kappa < \sigma$;*
- *J est un idéal sur κ;*
- *il existe une suite $\bar{\lambda} = \langle\lambda_i; i < \kappa\rangle$, tel que $\lambda_i < \lambda$ et*
- *$T_j(\bar{\lambda}) = \lambda$*
- *$\lambda_i^{\langle\sigma,\theta\rangle} = \lambda_i$ pour tout $i < \kappa$.*

Alors $\lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle} = \lambda$.

Preuve. Soit $\langle\theta_\xi; \xi < cf(\theta)\rangle$ une suite cofinale dans θ et telle que $\sigma < \theta_\xi$ et $\theta_\xi^\kappa = \theta_\xi$, pour tout $\xi < cf(\theta)$ (on fixe une suite cofinale et on remplace θ_ξ par θ_ξ^κ si necessaire). On fixe $\xi < cf(\theta)$. Pour tout $i < \kappa$, on a $\lambda_i = \lambda_i^{[\sigma,\leq\theta_\xi]}$ en effet $\lambda_i = \lambda_i^{\langle\sigma,\theta\rangle}$ et θ est fortement limite de cofinalité $< \sigma$. Alors on peut appliquer le Théorème **??** (avec θ_ξ à la place de θ) et on obtient $\lambda = \lambda^{\langle\sigma,\theta_\xi\rangle}$.
On en déduit que $\lambda = \lambda^{\langle\sigma,\theta\rangle}$. ■

1.7 Preuve de l'Hypothèse du Continu Revisitée

On peut prouver enfin l'Hypothèse Généralisée du Continu Revisitée.

Théorème 1.7.1 *Si μ est un cardinal fortement limite et non dénombrable, alors pour tout $\lambda \geq \mu$ il existe $\sigma < \mu$ tel que pour tout $\kappa \in [\sigma, \lambda)$, $\lambda^{[\kappa]} = \lambda$.*

Remarque 1.7.2 *Il suffit de montrer le théorème pour θ singulier.*

Preuve. En effet, supposons que le théorème ait été démontré pour tout θ' fortement limite et singulier non dénombrable. Si θ est un cardinal fortement limite et régulier non dénombrable (i.e. inaccessible), on peut trouver $S \subseteq \theta$ stationnaire un ensemble de cardinaux fortement limites et singuliers. Si $\lambda \geq \theta$, on peut appliquer le théorème à chacun des éléments θ_i de S. Pour tout $i < \theta$ on trouve $\sigma(\theta_i) < \theta$ tel que pour tout $\kappa \in [\sigma(\theta_i), \theta_i)$, $\lambda^\kappa = \lambda$. Par le Théorème de Fodor, il existe $\sigma < \theta$ tel que $\sigma = \sigma(\theta_i)$ pour tout $\theta_i \in T$ où $T \subseteq S$ stationnaire (dans θ). Alors pour tout $\kappa \in [\sigma, \theta)$ on a $\lambda^\kappa = \lambda$. ■

D'après la Remarque il suffit de montrer le Théorème suivant pour obtenir le résultat.

Théorème 1.7.3 *Soit θ un cardinal fortement limite et singulier. Pour tout $\lambda \geq \theta$, il existe $\sigma < \theta$ tel que $\lambda = \lambda^{[\sigma,\theta]}$.*

Preuve. Soit $\sigma_0 = cf(\theta)^+$. Le théorème se montre par récurrence sur λ. Pour $\lambda = \theta$, $\lambda = \lambda^{[\sigma_0, \leq\theta]}$ et la famille de tous les sous-ensembles bornés de θ convient (chaque sous-ensemble de θ est l'union de $cf(\theta)$ sous-ensembles bornés).
Notons que l'induction est triviale dans le cas où $cf(\lambda) \neq cf(\theta)$, donc on peut supposer que $cf(\lambda) = cf(\theta)$. Etant donné ça, deux cas sont possibles :

Cas 1 : Pour tout $A \subseteq Reg \cap \lambda \setminus \theta$, si $|A| < \theta$ alors $A \in J^{\sigma-com}_{\leq\lambda}[A]$.
Dans ce cas, grâce au Corollaire **??**, on a $\lambda = \lambda^{[\sigma_0,<\theta]}$.

Cas 2 : Il existe $A \subseteq Reg \cap \lambda \setminus \theta$ tel que $|A| < \theta$ et $A \notin J^{\sigma-com}_{\leq\lambda}[A]$. Alors il existe un filtre σ-complet D sur A tel que si $\kappa = |A| < \theta$ alors $\mathrm{tcf}(\Pi A/D) > \lambda$. Soit $f : \kappa \to A$ bijective. On a vu que $T_D(f) \geq \mathrm{tcf}(\Pi A/D) > \lambda$ donc par le Lemme **??** il existe $g \leq f$ tel que $T_D(g) = \lambda$.

On montre $\{i \in \kappa; g(i) \geq \theta\} \in D$: car sinon $\{i \in \kappa; g(i) < \theta\}$ est D-positif. Mais puisque $cf(\theta) < \sigma_0$ et D est σ_0-complet alors il existe $\theta' < \theta$ tel que $X = \{i < \kappa; g(i) < \theta'\}$ est D-positif. Par suite, $\mathrm{tcf}(\Pi g\restriction X) = \lambda$, ce qui est impossible car θ est fortement limite et $2^{\theta'} < \theta$.

Alors on peut supposer que pour tout $i < \kappa$, $g(i) \leq \theta$. Donc par hypothèse d'induction il existe $\sigma(i) < \theta$ tel que $g(i) = g(i)^{[\sigma_i,\leq\theta]}$. Puisque $cf(\theta) < \sigma_0$ et D est σ_0-complet, il existe σ tel que $\kappa, \sigma_0 < \sigma < \theta$ et $\{i < \kappa; \sigma(i) < \sigma\}$ est D-positif.

Pour simplifier on suppose que $\sigma(i) < \sigma$ pour tout $i < \kappa$. Soit $\sigma^1 = (\sigma^\kappa)^+$, on peut applique le Corollaire **??** à $\lambda > \theta > \sigma_1 > \kappa$. Ca nous donne $\lambda^{\langle \sigma_1, \theta \rangle} = \lambda$ mais puisque θ est fortement limite de cofinalité $< \sigma_1$, alors $\lambda^{[\sigma_1, \leq \theta]} = \lambda$. $\blacksquare$