Chapitre 21

Introduction

Les mathématiques à rebours [1] sont un ensemble d'outils provenant de la théorie de la preuve et de la calculabilité pour analyser le contenu calculatoire des théorèmes mathématiques. Elles permettent de répondre à des questions méta-mathématiques fondamentales telles que : « Quels sont les axiomes optimaux pour prouver les théorèmes ordinaires ? », ou bien : « Quel sens donner à l'implication d'un théorème par un autre ? »

1. Quête des axiomes optimaux

La quête des axiomes optimaux pour prouver les théorèmes usuels est la motivation historique des mathématiques à rebours, telles que conçues par Harvey Friedman en 1975-1976. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 9 sur la crise des fondements, les développements de la théorie des ensembles repoussant les limites de l'intuition, on a vu naître des paradoxes semant le doute dans la solidité de l'édifice des mathématiques. La crise des fondements a connu son paroxysme avec le second théorème d'incomplétude de Gödel, énonçant qu'une théorie calculatoirement énumérable cohérente capable de parler des entiers naturels,

Harvey Friedman, 1948–

1. « Reverse mathematics », en anglais.

ne pouvait prouver sa propre cohérence. Les mathématiciens sont donc condamnés à reléguer la cohérence des mathématiques au niveau de croyance, justifiée uniquement par l'absence de contradiction repérée à ce jour malgré un usage intensif des mathématiques au quotidien.

Les théorèmes peuvent donc être vus comme des édifices de connaissances construits sur la croyance en la cohérence d'un système d'axiomes. Plus la preuve d'un théorème fera appel à des axiomes forts, plus fragile sera cette connaissance. La démarche de Friedman consista donc à essayer de maîtriser ces risques, en déterminant quels théorèmes seraient invalidés si l'on devait renoncer à certains axiomes. En d'autre termes, il s'agissait de déterminer le niveau de fiabilité des théorèmes, en réponse directe à la crise des fondements. La question historique des mathématiques à rebours fut donc la suivante.

> « Quels sont les *axiomes optimaux* permettant de prouver les théorèmes des *mathématiques ordinaires* ? »

Cette question comporte plusieurs composants importants sur lesquels il convient de s'arrêter.

Tout d'abord, qu'entend-on par « mathématiques ordinaires » ? Il est important de comprendre que la démarche de Friedman était avant tout empirique et ne recherchait pas l'exhaustivité : il ne s'agit pas d'être capable d'analyser la puissance axiomatique des tout derniers résultats de théorie des ensembles, qui est une branche méta-mathématique à puissance logique très éloignée des mathématiques traditionnelles. Il s'agit plutôt d'étudier les mathématiques « de la vie de tous les jours », comme les théorèmes usuels d'algèbre ou d'analyse.

Comment prouver qu'un ensemble d'axiomes est optimal pour prouver un théorème ? Analyser avec soin la preuve du théorème pour en identifier les hypothèses ou les axiomes ne suffit pas. Il peut très bien exister une nouvelle preuve faisant appel à des axiomes plus élémentaires. La notion d'axiome optimal n'est donc pas une propriété relative à une preuve, mais à un théorème. Soient $A_1, \dots, A_n$ des axiomes *suffisants* pour prouver un théorème T. Autrement dit, $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to T$. Pour s'assurer que les axiomes sont *nécessaires*, il suffit de prouver l'implication inverse (d'où le nom de « mathématiques à rebours »). On se retrouve alors avec l'équivalence

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \leftrightarrow T$$

1.1. Choix d'une théorie de base

La démarche serait probablement vouée à l'échec si l'on se restreignait à l'implication logique sans fixer une théorie de base. L'implication logique est en effet une relation très fine qui placerait chaque théorème — et même différentes formulations d'un même théorème — dans des « degrés logiques » différents. Il est naturel de chercher à s'abstraire des détails de formulation et de travailler modulo des opérations « élémentaires » : nos implications logiques pourront s'établir relativement à une théorie de base permettant de réaliser ces opérations élémentaires. Il convient d'être prudent dans le choix de cette théorie : si celle-ci est trop forte —par exemple si elle permet déjà de prouver la plupart des théorèmes—, la valeur informative d'une implication $P \to Q$, relativement à cette théorie, sera affaiblie.

C'est là qu'intervient la calculabilité : nous allons fixer une théorie de base, RCA_0, capturant les *mathématiques calculables.* Le choix de cette théorie définit l'interprétation sémantique de la relation d'implication. Par exemple, si l'on considère que la théorie de Zermelo-Fraekel (ZF) représente les mathématiques consensuelles, c'est-à-dire les mathématiques largement acceptées par la communauté, une implication $\mathrm{ZF} \vdash P \to Q$ signifie que consensuellement, si l'on admet P, alors on admettra Q. De la même manière, une preuve de $\mathsf{RCA}_0 \vdash P \to Q$ signifie que si l'on fait confiance aux mathématiques calculables, et si l'on admet P, alors il est logique de considérer Q comme vrai. En pratique, la théorie RCA_0 est beaucoup plus faible que ZF, et en particulier beaucoup de théorèmes classiques ne sont pas prouvables dans RCA_0, comme nous allons le voir.

1.2. Arithmétique du second ordre

Pour mener à bien le programme historique des mathématiques à rebours, à savoir la quête des axiomes optimaux, il faut fixer un cadre formel, à commencer par le choix d'un langage. À première vue, le choix le plus évident est celui d'une théorie fondationnelle comme celle de la théorie des ensembles. En effet, comme nous l'avons vu dans la section 9-4, le langage ensembliste permet une formalisation unifiée de la totalité des mathématiques. Le choix des mathématiques à rebours s'est cependant porté sur le langage de l'arithmétique du second ordre, c'est-à-dire un langage où l'on manipule et quantifie sur les entiers naturels et les ensembles d'entiers.

Ce choix peut paraître surprenant : les ensembles d'entiers naturels étant par nature dénombrables, l'arithmétique du second ordre ne peut manipuler que des objets dénombrables. Comment alors parler des objets usuels qui ne le sont pas, comme les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Ce n'est de fait pas possible en toute généralité, mais les travaux de Hilbert et Bernays, *Grundlagen der Mathematik* (1934-1936), ont montré qu'une grande partie des mathématiques pouvait être formalisée, modulo un codage approprié, dans l'arithmétique du second ordre. Ainsi, par exemple les fonctions *continues* — et même boréliennes — de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettent toutes une représentation dénombrable. Rappelons que le but des mathématiques à rebours n'est pas d'être exhaustif, mais de rendre compte d'une tendance générale des mathématiques.

En contrepartie de cette légère perte de généralité, l'arithmétique du second ordre présente un avantage considérable : les objets mathématiques manipulés étant tous représentés par des entiers et des ensembles d'entiers, nous pouvons bénéficier des outils de la calculabilité pour parler de la complexité des axiomes. Il existe en effet une notion robuste de calculabilité sur les entiers, et notamment une caractérisation des ensembles calculables comme ceux définissables par des prédicats Δ^0_1. Les différentes représentations d'un même théorème dans l'arithmétique du second ordre à l'aide de différentes fonctions de codage n'auront en pratique pas d'impact sur la force du théorème, car la plupart des codages sont calculables, et donc équivalents dans la théorie de base RCA_0.

1.3. Phénomène de structure

Depuis le lancement des mathématiques à rebours, des centaines de théorèmes ont été analysés, provenant de toutes les branches des mathématiques. On retrouvera cette démarche dans l'excellent ouvrage de Steven Simpson, *Subsystems of Second-Order Arithmetics*. L'étude systématique des théorèmes classiques sous l'angle des mathématiques à rebours a laissé entrevoir deux observations empiriques :

La plupart des théorèmes ordinaires requièrent une puissance axiomatique faible. Cette observation peut être vue comme une réponse partielle à la crise des fondements, en délivrant un message d'optimisme : oui, la théorie de l'arithmétique est incomplète et nous devons nous contenter d'une croyance expérimentale en sa cohérence, oui, l'ajout d'axiomes à cette théorie ne fait potentiellement qu'empirer les risques, mais la plupart des théorèmes usuels ne requièrent qu'une partie ≪ faible ≫ de ces axiomes supplémentaires. Les mathématiques sont donc robustes face à d'éventuelles incohérences dues à des axiomes trop forts.

Les mathématiques sont calculatoirement très structurées. Plus précisément, il existe quatre grands systèmes d'axiomes, linéairement ordonnés par l'implication modulo RCA_0, tels que si l'on prend un théorème classique au hasard [2], il y a de fortes chances pour qu'il soit équivalent à l'un des quatre systèmes modulo RCA_0, ou bien même déjà prouvable dans RCA_0. On appelle cette observation le *phénomène du Club des cinq* (Big Five, en anglais).

Cette seconde observation est cependant à relativiser. Il existe des contre-exemples — provenant notamment de la théorie de Ramsey — se comportant de manière beaucoup plus chaotique. Cela a conduit certains chercheurs à soulever l'objection selon laquelle le phénomène de structure observé en mathématiques à rebours relève d'un biais humain, et que cette structure serait davantage celle du cerveau des mathématiciens que des mathématiques elles-mêmes.

2. ≪ Hasard ≫ est à prendre au sens informel du terme. Il s'agit d'une observation empirique et non d'un résultat de probabilités.

2. Comparaison des théorèmes

Les mathématiques à rebours ont petit à petit évolué, et de nombreuses branches sont nées sur le terreau originel de la recherche de l'optimalité des axiomes. Une grande partie de la discipline consiste en la comparaison et en la classification des théorèmes. Il est courant en mathématiques d'entendre des énoncés comme « les théorèmes A et B sont équivalents », ou encore « le théorème A n'est pas une conséquence du théorème B ». Les mathématiques à rebours permettent de donner un sens précis à ces affirmations informelles.

D'un point de vue purement logique, tous les théorèmes sont équivalents, au sens où ils sont tous interprétés par la valeur de vérité `vrai`. Quel sens donner à l'intuition de l'implication ou de l'équivalence entre deux théorèmes ? On pourrait par exemple considérer qu'un théorème T_0 implique un autre théorème T_1 si la preuve de T_1 fait intervenir l'énoncé T_0. Cependant, il est possible de remplacer chaque occurrence de T_0 par sa preuve, dans la preuve de T_1 pour obtenir une nouvelle démonstration ne faisant pas intervenir T_0. Cette tentative de formalisation n'est donc pas la bonne.

Si l'on en revient à l'intuition première, un théorème T_0 implique un théorème T_1 si T_1 peut être prouvé *de manière élémentaire*, en faisant appel à T_0 comme une boîte noire. Les mathématiques à rebours permettent justement de formaliser la notion de raisonnement élémentaire à l'aide du système RCA_0. Il est alors possible de donner un sens formel à l'implication $T_0 \to T_1$ en la prouvant dans RCA_0. Les mathématiques à rebours, initialement conçues pour identifier les axiomes nécessaires aux mathématiques, deviennent un outil de classification de théorèmes.

Exemple 2.1. On trouvera dans la littérature des affirmations comme « Le théorème des valeurs intermédiaires est une conséquence de la propriété de la borne supérieure ». Une version faible du théorème des valeurs intermédiaires — le théorème de Bolzano — affirme que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. La *propriété de la borne supérieure* affirme que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Supposons la propriété de la borne supérieure afin de montrer le théorème de Bolzano. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Soit $S = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. L'ensemble S contient a et est majoré par b, donc il admet une borne supérieure c.

En supposant par l'absurde $f(c) \neq 0$, alors pour un intervalle ouvert I tel que $f(c) \in I$ avec $\max I < 0$, on a par continuité de f un intervalle ouvert J contenant c tel que $f(J) \subseteq I$.

L'inégalité $c < \sup J$ contredit la qualité de borne supérieure à c. Par conséquent, $f(c) = 0$.

L'exemple précédent est une démonstration « élémentaire » (RCA_0 donnera un sens précis à cela) du théorème de Bolzano à partir de la propriété de la borne supérieure. Du point de vue des mathématiques à rebours, ces théorèmes doivent se formaliser dans le langage de l'arithmétique du second ordre. Une fonction continue pourra être représentée par un encodage de tous les ouverts $f^{-1}(]a, b[)$, pour des rationnels $a < b$ quelconques. La propriété de borne supérieure ne peut pas se formaliser pour des ensembles de réels quelconques, mais on pourra la formaliser pour toutes les classes boréliennes, qui peuvent se coder par des objets dénombrables.

L'intérêt de l'implication dans RCA_0 pour classifier les théorèmes reste cependant relativement limité, dans la mesure où la plupart des théorèmes sont équivalents à cinq grands ensembles d'axiomes. Il existe toutefois des raffinements de l'implication où l'on va contrôler les utilisations de T_0 dans la preuve de T_1, ou même interdire les analyses de cas. Ces restrictions aboutissent respectivement à la *réduction calculatoire* et la *réduction de Weihrauch*, que nous verrons en détail dans cette partie. De nos jours, les mathématiques à rebours ont pris un sens plus large, et forment une bannière sous laquelle se regroupent la démarche fondationnelle de recherche des axiomes optimaux et la classification des théorèmes à travers différentes réductions calculatoires.