Chapitre 29

Au delà des hyperarithmétiques

Qu'y a-t-il au-delà des ensembles hyperarithmétiques ? D'après une variation de l'exercice 28-1, les fragments du $\mathcal{O}$ de Kleene sont arbitrairement complexes dans la hiérarchie hyperarithmétique

Dans ce chapitre, nous allons introduire les classes et ensembles Σ^1_1 et Π^1_1 définis à l'aide de quantifications du second ordre. Ces notions vont nous permettre de donner une caractérisation des ensembles hyperarithmétiques purement en termes de définissabilité par des formules du second ordre, et d'en déduire de nouvelles caractérisations en termes de modulus ou de singletons Π^0_2.

Les ensembles Π^1_1 jouent un rôle central, notamment dans la correspondance entre calculabilité classique et hypercalculabilité. Nous verrons dans quelle mesure les ensembles Π^1_1 peuvent être perçus comme des ensembles « hypercalculatoirement énumérables ». Nous verrons en particulier que le $\mathcal{O}$ de Kleene joue pour les hyperithmétiques un rôle analogue à celui joué par $\emptyset'$ pour les calculables. Cette correspondance entre calculabilité et hypercalculabilité sera poussée plus loin dans le chapitre 30, où nous verrons que les classes Σ^1_1 peuvent être vues comme le pendant hypercalculable des classes Π^0_1.

1. Un peu d'histoire : l'école de Moscou

Au XIX^{e} siècle, les écrivains Nicolas Gogol et Fiodor Dostoïevski théorisent « l'âme russe », concept flou encore aujourd'hui, souvent perçu comme un mélange de mysticisme, d'irrationalité, de démesure et d'abattement.

On ne peut s'empêcher de voir la manifestation de cette fameuse âme russe — qu'elle soit fantasmée ou réelle — quand on se plonge dans l'histoire de la théorie des ensembles moscovite du début du XX^{e} siècle. Les mathématiciens Jean-Michel Kantor et Loren Graham ont mené une enquête historique approfondie dans laquelle ils étudient l'impact des différences culturelles entre la Russie et l'Europe occidentale, sur l'accueil et la perception des nouvelles mathématiques que constitue alors la théorie des ensembles. Ils écrivent notamment [107] :

≪ *Les mathématiciens russes de la fin du XIX^{e} siècle et du début du XX^{e} siècle pensaient que leurs travaux étaient étroitement liés à la philosophie, à la religion et à l'idéologie en général. De ce point de vue, ils se démarquaient de la plupart de leurs collègues français.* ≫

Egorov et Luzin

Nous avons parlé dans la section 17-1 du célèbre trio Français : Borel, Baire et Lebesgue, dont le travail avait éclos au début du XX^{e} siècle sur un ensemble de résultats d'une grande richesse faisant suite aux travaux de Cantor sur l'infini. Les concepts d'ensembles boréliens font alors peu à peu leur chemin dans la communauté mathématique, qui en perçoit l'esthétique et l'intérêt. C'est dans la lignée de leurs travaux que va naître sous l'impulsion de Dimitri Egorov et de Nicolaï Luzin l'*École mathématique de Moscou*, une des plus impressionnantes qui ait jamais existé. Egorov et Luzin ont étudié les mathématiques auprès de Nikolai Vasilievich Bugaev (1837-1903), qui s'intéressa beaucoup à la théorie des fonctions discontinues, lesquelles avaient pour lui un intérêt philosophique qui allait bien au-delà des considérations logiques des mathématiciens français et allemands [107, p.89] :

≪ *La discontinuité est une affirmation de l'individualité indépendante et autonome. La discontinuité intervient aussi là où surgissent les questions des causes finales et les problèmes esthétiques et éthiques.* ≫

On voit le contraste saisissant avec les déclarations de Poincaré (voir la section 17-1.1) pour qui la discontinuité est une aberration logique sans lien avec le monde réel, là où Bugaev voit dans les objets mathématiques discontinus un intérêt abstrait, presque mystique. Bugaev fut le professeur de mathématiques d'Egorov, qui au cours de plusieurs séjours en France et en Allemagne, se familiarisa avec les tout récents développements de la théorie des ensembles. Cette théorie le passionne, et Egorov décide de l'enseigner une fois de retour à Moscou. Luzin figure parmi ses étudiants préférés, et ils monteront ensemble ce qui sera d'abord un séminaire de mathématiques baptisé *Lusitanie* — on ne sait pas vraiment aujourd'hui si ce nom fut choisi en l'honneur de Luzin ou non — qui constituera les prémisses de ce qui deviendra plus tard l'École de mathématique de Moscou. L'histoire de la Lusitanie s'inscrit elle-même dans la grande Histoire et les profonds bouleversements qui agiteront la Russie au début du XX^{e} siècle. Mentionnons à ce sujet une anecdote sur la jeunesse de Luzin. Ce dernier est profondément marqué par la révolution manquée de 1905. Il perd son intérêt pour les mathématiques et traverse trois années durant une crise profonde, comme en témoignent les lettres qu'il écrit à Egorov [107, p.106] :

« *Quand vous m'avez rencontré à l'Université, je n'étais qu'un enfant ignorant. Je ne sais pas ce qui s'est passé, mais je ne peux me satisfaire aujourd'hui des fonctions analytiques et des séries de Taylor... La misère du peuple, les tourments de la vie... sont des visions insupportables... je ne peux plus vivre uniquement de science... je n'ai rien, pas de vision du monde et pas d'éducation.* »

Luzin sortira de sa dépression avec l'aide de son ami et guide spirituel Pavel Florensky — prêtre et mathématicien —, notamment suite à la lecture de la thèse de Florensky « *De la vérité religieuse* ». Luzin reprend alors ses travaux mathématiques. Toute sa vie, il s'intéressera essentiellement à la théorie des ensembles, qu'il étudiera avec toute la rigueur scientifique d'un mathématicien, mais aussi avec une conviction qui relève d'une certaine forme de foi religieuse. On trouvera par exemple dans ses notes :

« *Nous pensons que les nombres entiers existent objectivement. Nous pensons que la totalité des nombres transfinis de seconde classe existe objectivement. Nous désirons la chose suivante : ayant supposé leur évidence, nous associons à chacun des nombres transfinis une définition, un nom, et cela pour tous les nombres transfinis que nous envisageons.* »

La Lusitanie

Egorov et Luzin lancent peu de temps avant la Seconde Guerre mondiale un séminaire pour un petit groupe d'étudiants motivés : la Lusitanie, qui connaîtra un succès et une pérennité inattendue.

Dans la première décennie du XX^{e} siècle, la Russie ne comptait quasiment aucun mathématicien de renommée mondiale. Cela changera avec la création de la Lusitanie. En dix ans à peine, de nombreux très jeunes mathématiciens issus de cette école vont se faire une place sur la scène internationale, parmi lesquels on peut citer Pavel Alexandrov, qui développera une part importante de la topologie moderne, Pavel Urysohn, autre topologue de renom, ou encore Nina Bari, connue pour ses travaux sur les séries trigonométriques. Andreï Kolmogorov, certainement le plus célèbre mathématicien russe, passera aussi par la Lusitanie, mais un peu plus tard. En 1930, Moscou sera devenu une des principales capitales mathématiques mondiales.

Le séminaire d'Egorov et de Lusin prend rapidement : entre la pédagogie et l'investissement passionné des deux professeurs, la motivation et la qualité scientifique exceptionnelle des étudiants, l'alchimie se fait. Rapidement, un groupe très soudé, joyeux et travailleur se forme, et découvre avec admiration les derniers développements de ces « nouvelles mathématiques » que constitue la théorie des ensembles, à travers lesquelles se forme le sentiment de prendre part à quelque chose d'important, à une aventure intellectuelle plus grande que soi.

L'histoire de la Lusitanie est d'autant plus remarquable que les nombreux développements mathématiques de premier plan qui y eurent lieu se firent dans des conditions matérielles catastrophiques : la Première Guerre mondiale participe à la famine et aux pénuries généralisées qui sévissent dans le pays. La révolution d'Octobre (1917) plonge le pays dans une violente guerre civile. Les étudiants de Lusin et d'Egorov souffrent du froid et de la faim. La température des salles de classe descend parfois sous les 0-degrés [107, p.137]. Qu'importe, les étudiants viennent tout de même.

La théorie descriptive des ensembles

Le premier accomplissement d'importance de la Lusitanie est celui qui concerne l'objet du chapitre à venir : la naissance de la théorie descriptive des ensembles. Une des questions centrales était à l'époque celle de l'hypothèse du continu de Cantor. Alexandrov, alors à peine âgé de dix-huit ans montre que l'hypothèse du continu est vraie pour toutes les classes boréliennes. Nous verrons une forme moderne et effective de ce théorème avec le corollaire 30-3.3. Nous le savons aujourd'hui, l'hypothèse du continu demandera des efforts et développements bien plus conséquents, mais pour l'époque, il s'agissait tout de même d'une étape importante vers sa résolution. Pouvait-on étendre la preuve d'Alexandrov à toutes les classes ? À l'époque, l'existence de classes non boréliennes n'était pas encore complètement claire, et des exemples précis de ces classes l'étaient encore moins. Un an plus tard, un autre jeune étudiant de la Lusitanie, Mikhaïl Souslin, repère une erreur dans une preuve de Lebesgue datant de 1905, qui restera fameuse comme « l'erreur de Lebesgue », marquant le point de départ d'un champ de recherche nouveau : *la théorie descriptive des ensembles*. La démonstration de Lebesgue porte sur l'énoncé suivant : l'image d'une classe borélienne par une fonction continue est aussi une classe borélienne. Souslin montrera que ce n'est pas nécessairement vrai : l'image de certains boréliens par certaines fonctions continues sont des ensembles *strictement plus complexes* que les boréliens. C'est la découverte par Souslin des classes dites *analytiques* ou comme nous les appelons dans cet ouvrage, les classes $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$. Souslin [219] montrera par la suite que les boréliens sont exactement les classes $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ dont le complémentaire est également $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$. Plus tard, Kleene [116] donnera — en s'appuyant sur des résultats de Spector [214] — une version effective du théorème de Souslin, et qui s'applique non seulement aux classes, mais aussi aux ensembles d'entiers. C'est ce résultat que nous présenterons dans la section 5.

La fin

Si l'héritage de la Lusitanie perdure jusqu'à aujourd'hui, les troubles politiques du pays auront raison de la Lusitanie elle-même, qui s'achèvera vers les années 1920. La nouvelle génération de mathématiciens formée par Luzin et Egorov s'adapte au nouvel ordre des choses dicté par le pouvoir en place, là où l'ancienne génération ne s'y fait pas. Egorov ne cache ni ses convictions religieuses, ni son animosité envers le nouveau régime. Il est arrêté en 1930, accusé de mélanger mathématiques et religion. En prison, Egorov entame une grève de la faim, suite à laquelle il doit être transféré à l'hôpital où il meurt peu de temps après.

Luzin quant à lui fait profil bas. L'arrestation de son collègue et ami le terrorise, aussi se fait-il aussi discret que possible. Il cache ses convictions religieuses, et essaye de montrer sa loyauté envers l'état soviétique. Mais son passé le rattrape. Il est la cible d'attaques répétées jusqu'en 1936, au moment où il est accusé lors d'un procès d'être, en substance, un ennemi du parti soviétique. Plusieurs de ses anciens étudiants témoignent contre lui, l'accusant de plagiat et de népotisme. C'est un coup terrible pour Luzin, qui pour une raison encore floue aujourd'hui, et malgré une condamnation officielle, ne sera finalement ni arrêté ni expulsé de l'Académie des sciences.

En dépit de cet épisode douloureux de l'histoire des mathématiques, L'école fondée par Egorov et Luzin a perduré, et à travers elle, la Russie a posé une marque profonde et durable sur les mathématiques, apportant peut-être un peu de cette mystérieuse âme russe, à travers un style, et une intensité dans l'engagement mathématique. Nous terminons notre interlude historique par une citation du livre de Jean Michel Kantor et Loren Graham, qui montre bien la façon dont l'école russe a marqué l'imaginaire du mathématicien :

≪ *On citait encore avec une admiration mêlée de crainte les légendaires séminaires de mathématiques de Moscou où les exposés, commencés dans l'après-midi, se prolongeaient souvent tard dans la soirée, organisateurs et assistants du séminaire soumettant les orateurs à une longue suite de questions dans le but de comprendre. Chaque personne assistant au séminaire pouvait d'ailleurs être envoyée au tableau à l'improviste, ce qui rendait impossible l'habitude occidentale d'assister à un séminaire en spectateur distant et distrait.* ≫

Les auteurs de ce livre, qui ont eu la chance de travailler avec leurs collègues moscovites, peuvent attester que la légende comporte bien un fond de vérité...

2. Quantifications du second ordre

Nous avons vu avec la hiérarchie de Kleene que la hiérarchie arithmétique pouvait être étendue de manière naturelle le long des ordinaux calculables, pour donner les ensembles hyperarithmétiques. D'après la remarque suivant la proposition 28-1.7, cette extension peut-être pensée en termes d'alternance de quantificateurs sur des formules infinies.

Il existe une autre approche naturelle pour étendre la hiérarchie arithmétique, consistant à autoriser les quantificateurs du second ordre, autrement dit les quantificateurs sur les ensembles d'entiers. On obtient alors une hiérarchie dont le premier niveau contient déjà tous les ensembles hyperarithmétiques, comme nous le verrons par la suite.

Définition 2.1. Soit un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$.

1. A est Σ^1_1 s'il existe une classe arithmétique $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ telle que
$$A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, \exists X \in 2^{\mathbb{N}}\ (X, n) \in \mathcal{B}\}.$$
2. A est Π^1_1 s'il existe une classe arithmétique $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ telle que
$$A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, \forall X \in 2^{\mathbb{N}}\ (X, n) \in \mathcal{B}\}.$$
3. A est Δ^1_1 si A est Π^1_1 et Σ^1_1.

Les ensembles Σ^1_1 et Π^1_1 sont aussi qualifiés respectivement d'*analytiques* et *co-analytiques* effectifs. ♢

Notons que les Π^1_1 sont les complémentaires des Σ^1_1, et vice-versa. Un ensemble Σ^1_1 (resp. Π^1_1) a le droit d'utiliser des quantifications existentielles (resp. universelles) non pas sur les entiers, mais sur les ensembles d'entiers. Cela donne beaucoup plus de pouvoir expressif, et nous verrons que les ensembles hyperarithmétiques sont tous Π^1_1 et Σ^1_1. Nous verrons en fait avec le théorème 5.2 que les ensembles hyperarithmétiques sont exactement les ensembles Δ^1_1.

On définit de la même manière les notions de Σ^1_1 et Π^1_1 pour les classes.

Définition 2.2. Soit une classe $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.

1. $\mathcal{A}$ est Σ^1_1 s'il existe une classe arithmétique $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ telle que
$$A = \{X \in 2^{\mathbb{N}} \ :\ \exists Y \in 2^{\mathbb{N}}\ (Y, X) \in \mathcal{B}\}.$$
2. $\mathcal{A}$ est Π^1_1 s'il existe une classe arithmétique $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ telle que
$$A = \{X \in 2^{\mathbb{N}} \ :\ \forall Y \in 2^{\mathbb{N}}\ (Y, X) \in \mathcal{B}\}.$$
3. $\mathcal{A}$ est Δ^1_1 si, seulement si, $\mathcal{A}$ est Π^1_1 et Σ^1_1.