

On étudie la question de l'intersection entre deux langages. Dans la suite, on fixe deux automates $\mathcal{A}_1 = (\Sigma, \mathcal{Q}_1, \mathcal{I}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{T}_1)$ et $\mathcal{A}_2 = (\Sigma, \mathcal{Q}_2, \mathcal{I}_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{T}_2)$ sur un même alphabet Σ , et on cherche une méthode générique pour construire un automate $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.

Question 1. Justifiez graphiquement la loi de De Morgan ; à savoir que pour deux ensembles E_1 et E_2 contenus dans un même ensemble E ,

$$E_1 \cap E_2 = \overline{\overline{E_1} \cup \overline{E_2}}, \quad (1)$$

où $\overline{F}$ dénote le complémentaire dans E de l'ensemble $F \subseteq E$.

Question 2. En utilisant l'équation 1, établir une procédure pour construire l'automate $\mathcal{A}$. Expliquez pourquoi cette procédure n'est pas satisfaisante.

On va donc approcher le problème par une voie directe.

L'idée est la suivante : on veut construire un automate $\mathcal{A} = (\Sigma, \mathcal{Q}, \mathcal{I}, \mathcal{F}, \mathcal{T})$ qui simule, en parallèle, une exécution dans $\mathcal{A}_1$ et une exécution dans $\mathcal{A}_2$. Pour cela, on se propose de choisir $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2$, et on va essayer de garantir la propriété suivante :

($\mathcal{P}$) : “On peut atteindre l'état $(q_1, q_2) \in \mathcal{Q}$ après avoir lu le mot u dans $\mathcal{A}$ si et seulement si après avoir lu u , on peut atteindre l'état q_1 dans $\mathcal{A}_1$ et l'état q_2 dans $\mathcal{A}_2$.”

Question 3. Proposez une définition de $\mathcal{I}$ en fonction de $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ qui satisfasse ($\mathcal{P}$) dans le cas où $u = \varepsilon$.

Question 4. Proposez une définition de $\mathcal{T}$ en fonction de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ qui permette de simuler dans $\mathcal{A}$ deux exécutions simultanées dans $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, c'est-à-dire de satisfaire ($\mathcal{P}$).

Proposez une définition de $\mathcal{F}$ en fonction de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

On considère, à titre d'exemple, les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ représentés en Figure 1.

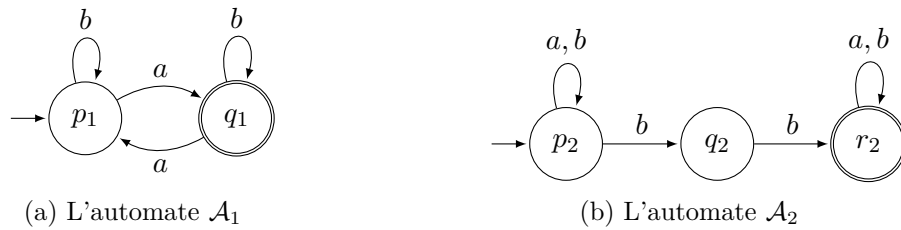


FIGURE 1 – Deux automates sur l'alphabet $\Sigma := \{a, b\}$.

Question 5. Quels sont les langages reconnus par les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$?

Question 6. Construire l'automate $\mathcal{A}$ selon la définition donnée dans les questions précédentes. Vérifiez que le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est bien l'intersection des langages $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.

On retourne maintenant au cas général, où les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont quelconques.

Question 7. Prouvez que la construction est correcte ; autrement dit, montrez que

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2).$$

Pour cela, on établira que la propriété ($\mathcal{P}$) est vérifiée.

Question 8. Expliquez en quoi cette seconde procédure pour construire l'intersection de deux automates est plus satisfaisante que la procédure proposée dans la Question 2.