Chapitre 3

Le langage de la logique des prédicats

Nous avons vu que l'objet de la logique élémentaire est la recherche des argumentations valides, et nous avons étudié la logique propositionnelle qui caractérise les argumentations valides pour un premier type d'assertions, à savoir les propositions composées. Mais la logique propositionnelle est insuffisante pour caractériser toutes les argumentations valides. En effet le raisonnement suivant :

```
     Socrate est un Homme.
     Tout Homme est mortel.
Donc Socrate est mortel.
```

est, sans contestation possible, un bon raisonnement. Or il ne se modélise pas en logique propositionnelle, puisque nous avons à faire à des propositions atomiques P, Q et R. Il faut donc une analyse plus poussée : une analyse des propositions (atomiques) elles-mêmes et non plus seulement une analyse des connecteurs.

3.1 Analyse des propositions

L'analyse logique des propositions n'est pas évidente et il a fallu de nombreux essais avant d'arriver à notre conception contemporaine, qui semble satisfaisante. Frege a décrit en 1879 les propositions à l'aide des *termes*, des *prédicats* et des *quantificateurs* (à la dénomination près). C'est cette description que nous allons voir maintenant, de façon informelle dans une première étape.

3.1.1 Termes

3.1.1.1 Univers du discours

Notion.- Une proposition est toujours un discours sur un certain ensemble d'objets, qui est le plus souvent déterminé de façon implicite mais que tout le monde saurait en général reconnaître si besoin était. Cet ensemble d'objets s'appelle l'**univers du discours**.

Exemples.- 1^o) Si on dit :

Elle n'est pas la mère de Pierre

« elle » désigne une femme et non, sauf dans de rares cas à l'occasion de jeux ou de poésie, par exemple une rose. L'univers du discours est donc ici l'ensemble des femmes, ou tout au moins un certain ensemble de femmes.

2^o) Si on dit :

Aucun n'est le père de Paul

alors on parle d'un certain ensemble d'hommes, indéterminé certes pour nous mais connu du locuteur, et certainement pas de l'ensemble de tous les hommes, car Paul a un père, bien sûr.

Notation.- On notera souvent par une majuscule telle que U l'univers du discours.

Terme.- On appelle **terme** tout mot ou groupe de mots servant à désigner un élément de l'univers du discours, que cet élément soit bien déterminé ou un élément plus vague.

Un terme ne désigne pas, par contre, un sous-ensemble de l'univers du discours ou un objet qui n'est pas élément de cet univers du discours.

Nous allons maintenant distinguer plusieurs façons de désigner un élément, et donc plusieurs sortes de termes.

3.1.1.2 Variable

Notion.- On appelle **variable d'individu** tout terme désignant un élément de l'univers du discours, et non autre chose, mais pas un élément déterminé, seulement un objet astreint à appartenir à l'univers du discours. On parle aussi quelquefois d'*élément générique* pour désigner l'élément que représente une variable.

Exemple.- Considérons la proposition :

Les étoiles brillent la nuit.

L'univers du discours est l'ensemble des étoiles. « Les étoiles » est une variable désignant une étoile quelconque (la marque du pluriel est d'ordre purement linguistique et non logique).

Notation.- Dans la suite on notera souvent par des minuscules de la fin de l'alphabet x, y, z, t, u, ... les variables (d'individu).

3.1.1.3 Constantes

Introduction.- Étant donné un univers du discours, on ne donne pas en général un nom à chacun de ses éléments. Il y a, par exemple, beaucoup trop d'étoiles pour que l'on puisse donner un nom à chacune d'elles. C'est pourquoi l'on considère souvent des éléments génériques de cet univers du discours, désignés par des variables. Par contre, certains éléments font l'objet d'une reconnaissance spéciale, on leur donne alors un nom, ce qui permet d'en parler. Ces éléments mis à part dans l'univers du discours sont appelés *éléments distingués*, leurs noms sont appelés des **constantes**.

Exemples.- 1^o) Considérons la proposition :

Algol brille dans le ciel.

Algol désigne une éoile bien déterminée et non plus une étoile générique.

2^o) Considérons la proposition :

Paul est le père de Pierre.

Paul et *Pierre* désignent (dans ce contexte) des personnes bien déterminées.

Notation.- Dans la suite, on notera souvent par des minuscules du début de l'alphabet a, b, c, ... les constantes.

3.1.1.4 Fonctions

Notion.- Certains éléments de l'univers du discours que l'on ne connaît pas spécialement peuvent néanmoins être désignés sans ambiguïté. Si je connais *Paul* sans connaître sa famille, *le père de Paul* désigne un être bien défini. Cette désignation *le père de Paul* fait apparaître l'expression « le père de... » Celle-ci permet de constituer d'autres désignations de personnes, comme *le père de Pierre* ou *le père de Jacques.*

Fonction.- Que faut-il pour qu'une telle expression aide à désigner un élément de l'univers du discours sans ambiguïté ?

On reconnaît facilement qu'il faut et qu'il suffit qu'elle représente une application (au sens mathématique) de l'univers du discours dans lui-même. Ainsi « le fils de... » ne convient pas car rien ne dit que celui à qui s'applique cette expression ait un fils, ou qu'il n'en ait qu'un. Seules les applications nous permettent donc de former des termes.

Traditionnellement ces applications s'appellent des **fonctions** en Logique, même si en théorie élémentaire des ensembles, « fonction » n'a pas tout à fait le même sens.

Remarques.- 1^o) Bien entendu on peut avoir des applications à plusieurs arguments comme lorsqu'on parle du « milieu de A et B ».

2^o) On peut utiliser la composition des applications pour obtenir de nouveaux termes, comme dans « le père du père de Paul ».

Notations.- Nous désignerons, comme d'habitude, les fonctions par f, g, h, ... Les termes formés grâce à elles seront de la forme f(x), g(x, y), g(a, f(x)), ...

3.1.2 Prédicats

3.1.2.1 Propriété

Définition.- Soit A un ensemble. Une **propriété** sur A est une expression, que nous noterons ici $P(x)$, contenant une et une seule variable, ici x, et telle que, pour chaque élément donné a de A, lorsque nous remplaçons la variable x par a, l'expression ainsi obtenue $P(a)$ est vraie ou fausse.

Exemples.- 1^o) Soit V l'ensemble des villes du monde et $P(x)$ l'expression « *x est la capitale de la France* ». On a bien ainsi une propriété sur V avec P(Paris) est vraie et, par exemple, P(Rome), P(Londres), P(New-York) et P(Lyon) sont fausses.

2^o) Soit A un certain ensemble d'objets et $P(x)$ l'expression « *x est rouge* ». On a bien une propriété sur A. Alors P(ce chandail) est vrai ou faux, bien qu'on ne sache pas ce qu'il en est exactement si on ne le voit pas.

Contre-exemple.- Soit A l'ensemble des hommes et $P(x)$ l'expression « *le père de x est-il jeune ?* ». Alors $P(x)$ n'est pas une proposition sur A puisque, par exemple, « le père de Paul est-il jeune ? » n'est pas une proposition.

3.1.2.2 Propriété et sous-ensemble de l'univers du discours

Définition.- Si $P(x)$ est une propriété sur A alors l'ensemble des éléments a de A tels que $P(a)$ est vrai est appelé l'**ensemble de vérité** de $P(x)$ et se note V_P.

On a donc : $V_P = \{a \in A \mid P(a)\}$.

Exemple.- En reprenant le premier exemple ci-dessus, on a :

$$V_P = \{ \textit{ Paris } \}.$$

Remarques.- 1^o) Ainsi une propriété sur un ensemble A détermine un sous-ensemble de A. Réciproquement, si B est un sous-ensemble de A, alors il existe une propriété $P(x)$ déterminant B, à savoir :

$$x \in B.$$

Les notions de propriété et de sous-ensemble sont donc fortement liées.

2^o) La notion d'expression est mal définie alors que celle de sous-ensemble est assez bien définie mathématiquement.

Propriété composée.- On peut utiliser les connecteurs logiques, et plus généralement les expressions logiques, pour obtenir de nouvelles propriétés à partir de propriétés données.

Considérons, par exemple, un ensemble A d'objets et les propriétés $V(x)$ et $R(x)$ sur A, définies respectivement par « *x est vert* » et « *x est rond* ». Alors $V(x) \wedge R(x)$ est la propriété « *x est vert et rond* ».

3.1.2.3 Relations binaires

Nous avons déjà vu la notion de relation (binaire) en théorie élémentaire des ensembles. Rappelons rapidement de quoi il s'agit.

Définition.- *Une* **relation binaire** *d'un ensemble A dans un ensemble B est une expression ayant deux variables, disons x et y, qui est vraie ou fausse lorsqu'on substitue à ces variables des éléments bien déterminés de A et B respectivement.*

Exemples.- 1^o) « *x est la capitale de y* », où x est une ville et y un état.
2^o) « *x est le père de y* », où x et y sont des personnes.

Notation.- Nous noterons $R(x, y), S(x, y)$, ... les relations binaires.

Remarque.- Le premier exemple est en fait une **relation hétérogène** dans la mesure où x parcourt un ensemble V de villes et y un ensemble P de pays. On recourt alors, en Logique, à l'astuce (non intuitive) de considérer comme univers du discours $U = V \cup P$.

3.1.2.4 Relations générales

Définition.- *Une* **relation** *sur un ensemble A est une expression comportant un certain nombre de variables x, y, z, ... telle que lorsque ces variables sont remplacées par des éléments bien déterminés de A, on obtient une proposition, c'est-à-dire une expression qui est vraie ou fausse.*

Exemple.- « *x est situé entre y et z* », où x, y et z sont des points du plan.

Notation.- On notera $P(x), R(x, y), S(x, y, z)$, ... les relations.

3.1.2.5 Prédicats

Définition.- *Un* **prédicat** *est une propriété ou une relation sur un ensemble A.*

Remarque.- La différence entre *prédicat* et *relation* est en fait assez floue. On peut cependant faire les remarques suivantes :

- 1^o) Nous avons donné une définition assez formalisée des relations (tout au moins binaires) en théorie élémentaire des ensembles. Un prédicat reste sous la forme d'une expression sans recours à cette définition formelle.

- 2^o) Un prédicat est une relation *homogène* en ce sens que les variables seront remplacées par des éléments d'un ensemble donné, et non d'ensembles différents suivant les variables. Le premier exemple de relation binaire ci-dessus, par exemple, ne sera pas considéré comme un prédicat.

3.1.2.6 Prédicats composés et particularisation d'un prédicat

Prédicats composés.- Comme pour les propriétés, on peut utiliser les connecteurs logiques, et plus généralement les expressions logiques, pour obtenir de nouveaux prédicats à partir de prédicats donnés.

Considérons par exemple un ensemble A d'objets et les prédicats $V(x)$ et $R(x, y)$ sur A définis respectivement par « *x est vert* » et « *x est de même taille que y* ». Alors $V(x) \wedge R(x, y)$ est le prédicat « *x est un objet vert de même taille que y* ».

Particularisation d'un prédicat.- Considérons, par exemple, une relation binaire $R(x, y)$ sur un ensemble A et a un élément de A. Alors $R(x, a)$ détermine une propriété sur A.

Considérons par exemple pour R la relation « *x est le père de y* ». Alors $R(x, Paul)$ caractérise les fils de Paul.

3.1.3 Quantificateurs

3.1.3.1 Quantification d'une propriété

Définition.- *Soit $P(x)$ une propriété sur un ensemble A. On note $\forall x\, P(x)$, et on lit « quel que soit x, P de x » ou « pour tout x, P de x », la proposition vraie lorsque la propriété P est vérifiée par tous les éléments x de A, c'est-à-dire si l'ensemble de vérité V_P de P est égal à A.*

Exemples.- 1^o) Soit H l'ensemble des hommes et $M(x)$ la propriété sur H définie par « *x est mortel* ». Alors on a $\forall x\, M(x)$ puisque tous les hommes sont mortels.

2^o) Soit C l'ensemble des cygnes et $B(x)$ la propriété sur C définie par « x est blanc ». Alors on n'a pas $\forall x\, B(x)$ puisqu'il existe des cygnes noirs.

Vocabulaire.- Le signe $\forall$ (c'est un A inversé légèrement modifié, « tout » se disant 'all' en anglais et 'alle' en allemand) s'appelle le **quantificateur universel**.

Remarque.- L'application d'un quantificateur universel à une propriété conduit à une proposition, c'est-à-dire une assertion vraie ou fausse.

Définition.- *Soit $P(x)$ une propriété sur un ensemble A. On note $\exists x\, P(x)$, et on lit « il existe x tel que P de x », la proposition vraie lorsque la propriété P est vérifiée par au moins un élément a de A, c'est-à-dire si l'ensemble de vérité V_P de P n'est pas vide.*

Exemples.- 1^o) Soit H l'ensemble des hommes et $D(x)$ la propriété sur H définie par « *x est décédé* ». Alors on a $\exists x\, D(x)$ puisque au moins un homme est décédé (depuis le début de l'humanité).

2^o) Soit H l'ensemble des hommes et $I(x)$ la propriété sur H définie par « *x est immortel* ». Alors on n'a pas $\exists x\, I(x)$ puisqu'aucun homme n'est immortel.

Vocabulaire.- Le signe $\exists$ (c'est un 'E' renversé légèrement modifié) s'appelle le **quantificateur existentiel**.

3.1.3.2 Généralisation : quantification des prédicats

On ne quantifie pas seulement les propriétés pour former des propositions mais aussi les prédicats pour, dans un premier temps tout au moins, former d'autres prédicats.

Définition.- *Soit $P(x, y, z, ...)$ un prédicat défini sur un ensemble A. Alors $\forall y\, P(x, y, z, ...)$ et $\exists y\, P(x, y, z, ...)$ sont de nouveaux prédicats définis sur A tels que pour $a, c, ...$ éléments de A :*

- le prédicat $\forall y\, P(a, y, c, \cdots)$ est vrai si, et seulement si, pour tout élément b de A, la proposition $P(a, b, c, \cdots)$ est vraie ;

- $\exists\, y P(a, y, c, ...)$ est vrai si, et seulement si, il existe au moins un élément b de A tel que la proposition $P(a, b, c, ...)$ soit vraie.

Exemples.- 1^o) Si $P(x, y)$ est « *x est la capitale de l'état y* » alors :

- $\exists x\, P(x, France)$ est vrai, car la France a bien une capitale ;

- $\exists y\, P(Paris, y)$ est vrai, car Paris est bien une capitale ;

- $\exists y\, P(Lyon, y)$ est faux, car Lyon n'est pas une capitale d'état ;

- $\exists y\, P(x, y)$ désigne la propriété « x est la capitale d'un état ».

2^o) Si $F(x, y)$ signifie « *x est fils de y* » alors $\exists x\, F(x, y)$ désigne la propriété $P(y)$ « *y a (au moins) un fils* ».

3.1.3.3 Quantification multiple

Étant donné un prédicat, on peut utiliser plusieurs quantificateurs soit pour obtenir un nouveau prédicat, soit pour obtenir une proposition.

Exemples.- Si $P(x, y)$ désigne le prédicat « *x est la capitale de l'état y* » alors :

- la proposition $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$ est vraie, car tout état a bien une capitale ;

- la proposition $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ est fausse, car toute ville n'est pas la capitale d'un état ;

- la proposition $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$ est fausse, car il n'existe pas de ville qui soit la capitale de tous les états.

3.1.4 Formules logiques

3.1.4.1 Thèse de Frege

Nous avons vu le besoin d'analyser les propositions, et nous avons dégagé les notions de *terme*, de *prédicat* et de *quantificateur*. Il se trouve qu'il n'est pas besoin d'introduire de nouvelle notion pour analyser les propositions.

Thèse de Frege (informelle).- *Toute proposition est une combinaison adéquate de termes, de prédicats, de quantificateurs et de connecteurs logiques.*

Nous verrons une formulation plus formelle de la thèse de Frege lorsque nous aurons défini précisément ce qu'est une formule logique.

3.1.4.2 Notion de formule logique

Introduction.- Comme en logique propositionnelle, où ce qui est intéressant c'est la forme des propositions composées, ici ce qui va être intéressant c'est la forme des propositions analysées, que l'on représente entièrement à l'aide de symboles pour les divers éléments. Ces formes sont appelées des *formules logiques*.

Exemple.- Considérons la proposition « *Tout homme est mortel* ».
Soit $H(x)$ le prédicat « x *est un homme* ».
Soit $M(x)$ le prédicat « x*est mortel* ».
Alors la forme de cette proposition est $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$.

Remarque.- De plus, pour la simplification de l'exposé, on appellera *formule logique* également toute forme de prédicat composé, qui n'est pas nécessairement une proposition.

Exemple.- Considérons les prédicats $P(x)$ pour « x *est une pomme* » et $R(x)$ pour « x *est rouge* ». Alors $P(x) \wedge R(x)$ est une formule logique exprimant le prédicat « x *est une pomme rouge* ».

3.1.4.3 Définition d'une formule logique

Nous venons de voir la notion intuitive de formule logique. Nous pourrions en donner tout de suite une définition formelle mais nous préférons passer à la notion de raisonnement en logique des prédicats, la notion informelle étant suffisante pour cela. Nous récapitulerons plus tard, au moment où nous en aurons vraiment besoin.

3.2 Vues sur le raisonnement intrapropositionnel

Nous avons vu que la meilleure méthode pour convaincre quelqu'un qu'une assertion est vraie est de faire un *raisonnement*, c'est-à-dire de partir d'un certain nombre de propositions qu'il accepte comme vraies et de montrer alors que la proposition que l'on veut faire admettre *s'en déduit logiquement*, c'est-à-dire qu'il est tout à fait clair qu'il doit alors accepter cette proposition.

Que faut-il entendre par *s'en déduit logiquement* ?

Bien souvent cela paraît clair. Nous avons, de plus, déjà réussi à en expliciter entièrement une forme dans le cadre de la logique propositionnelle. Nous allons maintenant en expliciter une autre forme à partir de notre notion intuitive dans le cadre de la logique des prédicats.

3.2.1 Argumentation intrapropositionnelle

Commençons par rappeler le plus célèbre exemple de raisonnement de la logique des prédicats.

```
     Socrate est un homme.
     Tout homme est mortel.
Donc Socrate est mortel.
```

Forme d'un raisonnement.- On sent bien que, dans ce genre de raisonnement, ce n'est pas le sens des propositions qui compte, mais leurs formes. La forme attachée au raisonnement ci-dessus est :

$$\begin{gathered} H(s) \\ \forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \\ \text{Donc } M(s). \end{gathered}$$

Ici, bien sûr, $H(x)$ et $M(x)$ sont les prédicats respectifs « *x est un homme* » et « *x est mortel* » et s est la constante « *Socrate* ». Le *donc* annonce la conclusion de notre raisonnement. Comme en logique propositionnelle, on ne sait pas par quoi le remplacer jusqu'ici. Il correspond donc à une notion nouvelle.

Définition.- *Si $A, A', \cdots, A", B$ sont des formules logiques (intrapropositionnelles), on appelle* **argumentation** *(de la logique des prédicats) toute phrase du genre :*

$$A, A', ..., A" \therefore B$$

(le nouveau signe $\therefore$ joue le rôle du donc ci-dessus).

Les formules logiques $A, A', ..., A"$ sont appelées les **hypothèses**, *la formule logique B est appelée la* **conclusion** *de l'argumentation.*

3.2.2 Argumentation valide

À tout raisonnement nous avons associé une forme de raisonnement, appelée ici *argumentation*. Cependant, comme dans le cas de la logique propositionnelle, il existe des raisonnements valables et des raisonnements fallacieux. Nous ne nous occuperons que des raisonnements valables, évidemment ; la forme d'un tel raisonnement sera appelé une **argumentation valide**.

Notation.- Pour indiquer qu'une argumentation :

$$A, A', ..., A" \therefore B$$

est valide on notera (comme en logique propostionnelle) :

$$A, A', ..., A" \vdash B.$$

Exemple de raisonnement fallacieux.- Considérons le raisonnement suivant :

En débarquant à Douvres, j'ai vu une Anglaise.
Elle était rousse.
Donc toutes les Anglaises sont rousses.

Ce raisonnement est évidemment fallacieux. Intuitivement, la seule conclusion que l'on puisse tirer des deux prémisses est qu'il existe une Anglaise rousse.

Formalisons la forme de ce raisonnement.
Posons a pour la constante « *l'Anglaise vue à Douvres* »,
$A(x)$ pour « *x est anglaise* »,
$D(x)$ pour « *x est la personne vue en débarquant à Douvres* »,
$R(x)$ pour « *x est rousse* »,
alors la forme de l'argumentation est :

$$D(a) \rightarrow A(a), R(a) \therefore \forall x(A(x) \rightarrow R(x))$$

Il résulte de notre intuition que cette argumentation n'est pas valide, comme nous l'avons vu.

Problème fondamental de la logique élémentaire.- *Quelles sont les argumentations valides ?*

Nous avons une notion intuitive de ce qu'est une argumentation valide, mais pouvons-nous en donner une caractérisation formelle, comme nous l'avons fait pour la logique propositionnelle ? Pouvons-nous donner un moyen pour reconnaître à coup sûr une argumentation valide ?

3.3 Définition formelle des formules logiques

Nous avons dit qu'une *formule logique* est une forme de proposition composée analysée (complexe) ou d'un prédicat composé. Mais, pour l'instant, nous sommes restés sur une notion intuitive de ces concepts. Nous allons être plus clair en donnant une définition formelle.

3.3.1 Formule logique

3.3.1.1 Définitions

Définition.- *Le* **vocabulaire** *de la logique de prédicats est constitué* :

- *de* **variables d'individus** $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$
- *de* **constantes d'individus** $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$
- *de* **symboles de fonctions** $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$, chacun étant affecté d'un entier naturel, appelé son **arité**,
- *de* **symboles de relations**, ou **prédicats**, $R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$, chacun étant affecté d'un entier naturel, appelé son **arité**,
- *des* **connecteurs logiques** $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$,
- *et des* **quantificateurs** $\forall$ et $\exists$.

Remarques.- 1^o) Formellement, d'après la définition ci-dessus, on ne devrait utiliser que les variables $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ (ou, si l'on préfère, $x', x'', x''', \cdots$) mais nous avons vu qu'en pratique on utilise, pour plus de lisibilité, les variables $x, y, z, \cdots$

2^o) De même, formellement, d'après la définition ci-dessus, on ne devrait utiliser que les constantes $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ (ou, si l'on préfère, $a', a'', a''', \cdots$) mais nous avons vu qu'en pratique on utilise, pour plus de lisibilité, les constantes $a, b, c, \cdots$

3^o) De même, formellement, d'après la définition ci-dessus, on ne devrait utiliser que les symboles de fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ (ou, si l'on préfère, $f', f'', f''', \cdots$) mais nous avons vu qu'en pratique on utilise, pour plus de lisibilité, les symboles de fonctions $f, g, h, \cdots$ ou, mieux, $f(x), f(x,y), g(x), \cdots$ pour dénoter l'arité qui leur sont associée.

4^o) De même, formellement, d'après la définition ci-dessus, on ne devrait utiliser que les symboles de relations $R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$ (ou, si l'on préfère, $R', R'', R''', \cdots$) mais nous avons vu qu'en pratique on utilise, pour plus de lisibilité, les symboles de relations $R, S, T, \cdots$ ou, mieux, $R(x), R(x,y), S(x), \cdots$ pour dénoter l'arité qui leur sont associée.

Définition.- *L'ensemble des* **termes** *est défini inductivement par* :

- *toute constante d'individu est un terme,*
- *toute variable d'individu est un terme,*
- *si f est un symbole de fonction n-aire et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ est un terme.*

Définition.- *L'ensemble des* **formules logiques** *est défini inductivement par* :

- *si R est un symbole de relation n-aire et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes alors $R(t_1, \cdots, t_n)$ est une formule logique,*
- *si ϕ et ψ sont des formules logiques alors $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$ et $\phi \leftrightarrow \psi$ sont des formules logiques,*
- *si ϕ est une formule logique et x une variable d'individu alors $\forall x\, \phi$ et $\exists x\, \phi$ sont des formules logiques.*

3.3.1.2 Lois d'induction pour les éléments de la logique des prédicats

Il résulte des deux définitions inductives ci-dessus les deux lois d'induction suivantes.

Loi d'induction pour les termes.- *Soit $\mathcal{A}$ est un ensemble de termes tel que* :

- *toute constante d'individu appartienne à $\mathcal{A}$,*
- *toute variable d'individu appartienne à $\mathcal{A}$,*
- *si f est un symbole de fonction n-aire et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ appartient à $\mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les termes.

Loi d'induction pour les formules logiques.- *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules logiques tel que* :

- *si R est un symbole de relation n-aire et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes alors $R(t_1, \cdots, t_n)$ appartient à $\mathcal{A}$,*
- *si ϕ et ψ sont des éléments de $\mathcal{A}$ alors $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$ et $\phi \leftrightarrow \psi$ sont aussi des éléments de $\mathcal{A}$,*
- *si ϕ est un élément de $\mathcal{A}$ et x une variable d'individu alors $\forall x\, \phi$ et $\exists x\, \phi$ sont aussi des éléments de $\mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est l'ensemble de toutes les formules logiques.

3.3.2 Variables libres, variables liées, énoncés

3.3.2.1 Variables libres et variables liées

Notion.- Pour des raisons techniques, on appelle **formule ouverte** toute formule sans aucune occurrence de quantificateur. Par exemple si R(x,y) et S(x) sont des symboles de relation alors $R(x,y) \wedge S(x)$ est une formule ouverte mais $\forall x\, R(x,y)$ est une formule logique qui n'est pas ouverte.

On peut bien sûr définir inductivement l'ensemble des formules ouvertes.

Définition.- *L'ensemble des* **formules logiques ouvertes** *est défini inductivement par :*

— *si R est un symbole de relation n-aire et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes alors $R(t_1, \cdots, t_n)$ est une formule logique ouverte,*

— *si ϕ et ψ sont des formules logiques ouvertes alors $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ et $\phi \leftrightarrow \psi$ sont des formules logiques ouvertes,*

— *toute formule logique ouverte s'obtent de cette façon.*

Loi d'induction pour les formules logiques ouvertes.- *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules logiques ouvertes tel que :*

— *si R est un symbole de relation n-aire et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes alors $R(t_1, \cdots, t_n)$ appartient à $\mathcal{A}$,*

— *si ϕ et ψ sont des éléments de $\mathcal{A}$ alors $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ et $\phi \leftrightarrow \psi$ sont aussi des éléments de $\mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est l'ensemble de toutes les formules logiques ouvertes.

Notion.- Considérons la formule logique suivante :

$$\exists x\, \phi(x,y)$$

où ϕ est une formule logique ouverte. Elle représente une relation unaire, dont le seul argument est y. Par exemple si $\phi(x,y)$ représente « x est le fils de y » alors la formule ci-dessus caractèrise les personnes ayant (au moins) un fils. La variable x n'est pas visible « de l'extérieur ». On dit que x est une **variable liée** et que y est une **variable libre** dans la formule.

Définition.- *On définit inductivement l'ensemble Free(ϕ) des* **variables libres** *d'une formule ϕ de la façon suivante :*

— *si $R(x_1, \cdots, x_n)$ est un symbole de relation n-aire alors :*

$$\text{Free}(R) = \{x_1, \cdots, x_n\}$$

— *si ϕ est une formule logique alors :*

$$\text{Free}(\neg\phi) = \text{Free}(\phi)$$

— *si ϕ et ψ sont des formules logiques alors :*

$$\text{Free}(\phi \wedge \psi) = \text{Free}(\phi \vee \psi) = \text{Free}(\phi \to \psi) = \text{Free}(\phi \leftrightarrow \psi) = \text{Free}(\phi) \cup \text{Free}(\psi)$$

— *si ϕ est une formule logique et x une variable d'individu alors :*

$$\text{Free}(\forall x\, \phi) = \text{Free}(\exists x\, \phi) = \text{Free}(\phi) \backslash \{x\}.$$

Définition.- *Une* **variable** *x est* **liée** *dans la formule ϕ si elle n'y est pas libre.*

3.3.2.2 Énoncés

Les formules sont des formes de relations mais, pour le raisonnement, on s'intéresse plutôt aux propositions. Remarquons qu'une formule sans variable libre a, dans un univers donné, une valeur de vérité et correspond donc à une proposition.

Définition.- *Un* **énoncé** (*ou* **formule close**) *est une formule logique sans variable libre.*

Pour les argumentations, on choisira comme hypothèses et conclusion des énoncés.

3.4 Passage des phrases aux formules

Il est utile de se référer aux règles suivantes :

— Une phrase de la forme '*Tous les A sont des B*' se formalise en $\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$, où $A(x)$ est le prédicat « *x est un A* » et $B(x)$ est le prédicat « *x est un B* ». Par exemple, « *Tous les mathématicens aiment la musique* » se formalise en $\forall x\,(M(x) \rightarrow A(x))$, où $M(x)$ signifie « *x est un mathématicien* » et $A(x)$ signifie « *x aime la musique* ».

— Une phrase de la la forme '*Certains A sont des B*' ou '*Quelques A sont des B*' se formalise en $\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$, où $A(x)$ est le prédicat « *x est un A* » et $B(x)$ est le prédicat « *x est un B* ». Par exemple, « *Certains parisiens sont blonds* » se formalise en $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$, où $P(x)$ signifie « x est parisien » et $B(x)$ signifie « *x est blond* ».

— Une phrase de la la forme '*Aucun A n'est un B*' se formalise en $\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$, où $A(x)$ est le prédicat « *x est un A* » et $B(x)$ est le prédicat « *x est un B* ». Par exemple « *Aucun philosophe ne comprend quelque chose à la politique* » se formalise en $\forall x\,(P(x) \rightarrow C(x)$, où P signifie « *x est philosophe* » et $C(x)$ signifie « *x comprend quelque chose à la politique* ».

La phrase « *Certaines personnes respectent tout le monde* » se formalise en $\exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(P(y) \rightarrow R(x,y)))$, où $P(x)$ signifie « *x est une personne* » et $R(x,y)$ signifie « *x respecte y* ».

3.5 Exercices

3.5.1 Formalisation logique des phrases

Exercice 1.- *Déterminer les formules logiques correspondant aux phrases suivantes, en précisant les constantes et les prédicats utilisés* :

- 1^o) Quiconque persiste peut apprendre la logique.
- 2^o) Aucun politicien n'est honnête.
- 3^o) Il n'est pas vrai que tous les oiseaux peuvent voler.
- 4^o) Tous les oiseaux ne peuvent pas voler.
- 5^o) Si quelqu'un peut résoudre ce problème alors Marie le peut aussi.
- 6^o) Personne n'aime un perdant.
- 7^o) Personne du cours de géographie n'est plus intelligent que n'importe lequel du cours d'histoire.
- 8^o) Jean hait tous ceux qui ne se haïssent pas eux-mêmes.
- 9^o) Tout le monde aime quelqu'un mais personne n'aime tout le monde, ou quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.
- 10^o) Vous pouvez tout le temps duper quelques personnes et vous pouvez duper tout le monde de temps en temps mais vous ne pouvez pas duper tout le monde tout le temps.
- 11^o) Tous ceux qui connaissent Julie l'aiment.
- 12^o) Aucun barbier ne rase exactement les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes.

3.5.2 Passage du langage logique au langage courant

Exercice 1.- *Traduire les énoncés suivants en français* :

- 1^o) $\forall x\,((M(x) \wedge \forall y\,\neg W(x,y)) \rightarrow U(x))$, où $M(x)$ signifie « *x est un homme* », $W(x,y)$ signifie « *x est marié à y* » et $U(x)$ signifie « *x n'est pas heureux* ».

- 2^o) Dans les énoncés suivants, $P(x)$ signifie « *x est une personne* » et $H(x,y)$ signifie « *x hait y* » :

i. $\exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(P(y) \rightarrow H(x,y))$
ii. $\forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\,(P(y) \rightarrow H(x,y)))$
iii. $\exists x(P(x) \wedge \forall y\,(P(y) \rightarrow (H(x,y) \leftrightarrow H(y,y))))$

- 3^o) $\forall x\,(H(x) \rightarrow \exists y\,\exists z\,(\neg A(y,z) \wedge \forall u\,(P(u,x) \leftrightarrow (A(u,y) \vee A(u,z)))))$, où $H(x)$ signifie « *x est une personne* », $A(u,v)$ signifie « *x est égal à v* » et $P(u,x)$ signifie « *u est un parent de x* ».

Exercice 2.- *Traduire les énoncés suivants en français* :

a) $\forall x\,(J(x) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge N(y,x))))$, où l'univers du discours est l'ensemble des jours et des gens, $J(x)$ signifie « *x est un jour* », $P(y)$ signifie « *y est une personne* » et $N(y,x)$ signifie « *y est né le jour x* ».

b) Pour les énoncés suivants, l'univers du discours est l'ensemble de toutes les personnes et $A(x,y)$ signifie que « *x aime y* » :

$$\exists x \forall y\, A(x,y)$$

$$\forall y \exists x A(x,y)$$

$$\exists x \forall y\,(\forall z A(y,z) \rightarrow A(x,y))$$

$$\exists x \forall y\, \neg A(x,y)$$

Exercice 3.- *Exprimer en français les relations suivantes* :

a) $F(x) \wedge \exists z\,(P(x,z) \wedge P(z,y))$, où $F(u)$ signifie « u est une femme » et $P(u,v)$ signifie « *u est l'un des deux parents de v*.

b) $H(x) \wedge \forall y\, M(x,y)$, où l'univers du dicours est l'ensemble des personnes vivantes, $H(x)$ signifie « *x est un homme* » et $M(x,y)$ signifie « *x est marié à y* ».

c) i. $\exists x \exists y\,(P(x,z) \wedge P(y,t) \wedge F(x,y))$
ii. $\exists z\,(P(x,z) \wedge F(z,y))$

où l'univers du discours est l'ensemble des personnes, $P(x,y)$ signifie « *x est l'un des deux parents de y* » et « $F(x,y)$ signifie « *x et y ont les mêmes deux parents* » (*ils sont de la même fratrie*).

d) $\neg P(y,x) \wedge \exists z\,(P(z,x) \wedge F(y,z))$, où l'univers du discours est l'ensemble de toutes les personnes, $P(u,v)$ signifie « *u est l'un des deux parents de v* » et $F(u,v)$ signifie « *u est une femme de v* ».

3.5.3 Variables libres et liées

Exercice 1.- *Quelles sont les variables libres et les variables liées des formules logiques suivantes* :

a. $R(x, y) \rightarrow \forall y\, S(y)$
b. $\forall y\, R(y, a) \vee \exists y\, R(x, y)$
c. $\forall y\, R(x, y)$
d. $\forall y R(x) \rightarrow S(x, y)$

Pour le a. :

$$\begin{aligned} Free(R(x,y) \rightarrow \forall y\, S(y)) &= Free(R(x,y)) \cup Free(\forall y\, S(y)) \\ &= \{x, y\} \cup Free(S(y)) \backslash \{y\} \\ &= \{x, y\} \cup [\{y\} \backslash \{y\}] \\ &= \{x, y\} \cup \emptyset \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$