Université Paris 12
Probabilités (2010 - 2011) L2

Feuille 3
Espérance.

Exercice 1: Une coccinelle se déplace sur un tétraèdre de sommets A, B, C, D en partant de A; si elle est en un des trois sommets A, B, C elle choisit au hasard l'un des 3 autres sommets et s'arrête dès qu'elle arrive en D.

1. Quel temps mettra en moyenne l'insecte pour atteindre son but ?
2. Majorer la probabilité qu'aprés son dixième déplacement, la coccinelle ne soit toujours pas en D. (On pourra noter X la variable égale au temps de parcours, et D_n l'évènement "la coccinelle est en D au temps n".)

Exercice 2: Une marque de lessive joint à chacun de ses paquets une carte d'un jeu de 52 cartes qui est choisie au hasard avec une probabilité uniforme. Soit k un entier positif plus petit que 52, et on suppose que l'on a obtenu k cartes distinctes: on pose X_k le nombre de paquets à acheter pour avoir une carte différente des k déjà obtenues.

1. Calculer $P(X_k = n)$ pour tout entier n.
2. Calculer $E[X_k]$.
3. Soit S le nombre de paquets de lessive à acheter pour avoir un jeu complet. Montrer que
$$S = 1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{51}.$$
4. Calculer l'espérance de S.

Exercice 3
On s'intéresse à modéliser deux variables aléatoires

$$X = \text{"nombre de personnes rencontrées au cours de la vie"},$$

et,

$$N = \text{"nombre d'amis faits au cours de la vie"}.$$

On suppose que X est une variable de Poisson de paramètre λ et que chaque personne rencontrée à la probabilité p de devenir un ami, et la probabilité $1 - p$ de devenir un ennemi.

1. Trouver la probabilité de se faire exactement k amis sachant qu'on a rencontré n personnes, c'est à dire $P(N = k/X = n)$.
2. Calculer $P(N = k)$ pour tout entier $k \geq 0$. Quel type de loi est-ce?

3. Quelle est la probabilité de se faire au moins un ami, pour $\lambda = 100$ et $p = 0,01$?
4. En moyenne, combien d'amis se fait-on au cours de la vie dans notre modèle?

Exercice 4
Soient $\{X_i,\ i = 1, 2\}$ deux variables de Bernoulli indépendantes. Soient $\{Y_i,\ i = 1, 2\}$ liées aux X_i par $Y_i = 2X_i - 1$. Est-ce que Y_1 et Y_1Y_2 sont indépendantes.

Exercice 5
Soient $\{X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ des variables indépendantes. Montrer la formule du cours:

$$var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = var(X_1) + \cdots + var(X_n).$$

On justifiera d'abord que

$$E\left[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])\right] = 0.$$

Exercice 5: Un QCM comporte 20 questions et chaque question a r ($r \geq 2$) réponses possibles dont une seule est juste.

1. On soumet une première fois le QCM à un candidat qui répond au hasard et on met un point par réponse juste. Quelle est la loi de X_1 égale au nombre de réponses justes ?
2. On lui soumet une deuxième fois les questions ayant reçu une mauvaise réponse et on met $\frac{1}{2}$ point par réponse juste. Quelle est la loi de X_2 égale au nombre de réponses justes ?
3. Soit N la note obtenue. Calculer $E(N)$. En déduire r pour qu'un étudiant répondant au hasard obtienne en moyenne $5/20$.

Exercice 6: On dispose d'une paire de dés, un rouge et un vert. Soit A l'événement *le score du dé rouge est strictement supérieur à celui du vert* (lors d'un lancer).

1. Calculer $P(A)$.
2. On lance n fois la paire de dés et on note S_n le nombre de réalisations de A et $Z = S_n/n$ la fréquence des réalisations de A. Calculer $E(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.
3. Expliciter l'inégalité de Tchebycheff pour Z.
4. Pour $n = 700$, donner un majorant des probabilités suivantes:
   a) $P\big(Z \leq \frac{1}{3} \text{ ou } Z \geq \frac{1}{2}\big)$ b)$P\big(Z \geq \frac{7}{12}\big)$.
5. Comment choisir n pour que $P\Big(\frac{5}{12} - 10^{-2} < Z < \frac{5}{12} + 10^{-2}\Big) \geq 0,99$?