

Feuille 3
Espérance.

Exercice 1: Une coccinelle se déplace sur un tétraèdre de sommets A, B, C, D en partant de A ; si elle est en un des trois sommets A, B, C elle choisit au hasard l'un des 3 autres sommets et s'arrête dès qu'elle arrive en D .

1. Quel temps mettra en moyenne l'insecte pour atteindre son but ?
2. Majorer la probabilité qu'après son dixième déplacement, la coccinelle ne soit toujours pas en D . (On pourra noter X la variable égale au temps de parcours, et D_n l'évènement "la coccinelle est en D au temps n ".)

Exercice 2: Une marque de lessive joint à chacun de ses paquets une carte d'un jeu de $N = 52$ cartes. On suppose le nombre de paquets infiniment grand. On pose X_k la variable égale au nombre de paquets à acheter pour avoir une carte différente des k distinctes déjà obtenues, et S le nombre de paquets à acheter pour avoir un jeu complet. Calculer l'espérance de S .

Exercice 3: Un boulanger mélange 1000 raisins dans de la pâte pour fabriquer 100 brioches de même masse.

1. Quelle est la loi exacte du nombre X de raisins contenus dans une brioche achetée chez ce boulanger? Précisez quelles hypothèses vous faites. Donnez sans calcul l'espérance et la variance de X .
2. En utilisant une *approximation* classique de la loi de X , évaluer la probabilité que la brioche achetée contienne 10 raisins à deux unités près (i.e. $8 \leq X \leq 12$).
3. En utilisant l'inégalité de Tchebycheff, *majorer* la probabilité que la brioche achetée ne contienne pas plus de 3 ou au moins 17 raisins.

Exercice 4: Un QCM comporte 20 questions et chaque question a r ($r \geq 2$) réponses possibles dont une seule est juste.

1. On soumet une première fois le QCM à un candidat qui répond au hasard et on met un point par réponse juste. Quelle est la loi de X_1 égale au nombre de réponses justes ?
2. On lui soumet une deuxième fois les questions ayant reçu une mauvaise réponse et on met $\frac{1}{2}$ point par réponse juste. Quelle est la loi de X_2 égale au nombre de réponses justes ?
3. Soit N la note obtenue. Calculer $E(N)$. En déduire r pour qu'un étudiant répondant au hasard obtienne en moyenne 5/20.

Exercice 5: On dispose d'une paire de dés, un rouge et un vert. Soit A l'événement *le score du dé rouge est strictement supérieur à celui du vert* (lors d'un lancer).

1. Calculer $P(A)$.
2. On lance n fois la paire de dés et on note S_n le nombre de réalisations de A et $Z = S_n/n$ la fréquence des réalisations de A . Calculer $E(Z)$ et $\text{Var}(Z)$.
3. Expliciter l'inégalité de Tchebycheff pour Z .
4. Pour $n = 700$, donner un majorant des probabilités suivantes:
a) $P(Z \leq \frac{1}{3} \text{ ou } Z \geq \frac{1}{2})$ b) $P(Z \geq \frac{7}{12})$.
5. Comment choisir n pour que $P\left(\frac{5}{12} - 10^{-2} < Z < \frac{5}{12} + 10^{-2}\right) \geq 0,99$?

Exercice 6: Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang du premier succès dans une suite d'expériences indépendantes avec probabilité de succès p pour chacune ($p \in]0, 1[$). Calculer $E\left(\frac{1}{X_1}\right)$.

Soit X_2 le rang du second succès. Calculer $E\left(\frac{1}{X_2-1}\right)$