

Feuille 2

Partitions, Conditionnement, Indépendance

Exercice 1 Soit X_1 et X_2 deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. Soit $\{Y_i, i = 1, 2\}$ définies par $Y_i = 2X_i - 1$. Est-ce que Y_1 et Y_1Y_2 sont indépendantes? Qu'en est-il si le paramètre de X_1 et X_2 est $1/4$?

Exercice 2 Soit X une v. a. de loi géométrique de paramètre $p, 0 < p < 1$ (i. e. $\forall k \geq 1, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$).

1. Montrer que $P(X > k) = (1 - p)^k, \forall k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (*) $P(X > k + \ell | X > k) = P(X > \ell), \forall k, \ell \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si X est une v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X > k) > 0, \forall k \geq 0$, et (*) est vérifiée, alors la loi de X est la loi géométrique de paramètre $p = P(X = 1)$. (Indication : On posera $F(k) = P(X > k)$, $f(k) = \log F(X > k)$, et on montrera successivement que $F(k + \ell) = F(k)F(\ell)$, $f(k + \ell) = f(k) + f(\ell)$, et $f(k) = kf(1)$).

Exercice 3 Un examen systématique de dépistage est institué pour détecter une maladie X. On sait que, dans la population générale, le risque d'avoir cette maladie est de 10^{-3} , alors que dans une population définie "à risque", ce risque est de 0,2. L'examen donne des "faux positifs" avec une probabilité de 0,1 et des "faux négatifs" avec une probabilité de 0,3.

Un individu subit l'examen qui revient positif. Quelle est la probabilité qu'il ait contracté la maladie

- 1) s'il fait partie de la population générale ?
- 2) s'il fait partie de la population à risque ?

On rappelle deux définitions:

- Faux positif : l'examen est positif alors que l'individu n'a pas contracté la maladie.
- Faux négatif : l'examen est négatif alors que l'individu a contracté la maladie.

Exercice 4 On suppose maintenant qu'une carte d'un jeu de 32 cartes a été perdue, et on ignore laquelle. On pioche au hasard une carte dans ce jeu incomplet. Quelle est la probabilité d'avoir l'as de coeur? Sachant que l'on a pioché l'as de coeur, quelle est la probabilité d'avoir perdu l'as de trèfle?

Exercice 5 (Les deux questions sont indépendantes)

1. 1) Montrer que si $E_1, \dots, E_n$ sont n événements mutuellement indépendants, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(E_i)).$$

2. 2) Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité $p \in]0, 1[$ et dont la réunion soit l'espace Ω tout entier?

Exercice 6

1. On dispose de n boules. On met chacune d'elles, indépendamment des autres, dans la boîte A avec la probabilité p , et dans la boîte B avec la probabilité $1 - p$. On désigne par X (resp. Y) le nombre de boules que l'on a ainsi placées dans A (resp. dans B). Préciser les lois des v. a. X et Y . Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
2. On dispose d'un nombre aléatoire Z de boules, avec $\text{loi}(Z) =$ la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On refait les mêmes opérations que ci-dessus avec les Z boules, les tirages étant bien sûr indépendants de la valeur de Z . Montrer que cette fois X et Y sont indépendantes, X de loi de Poisson de paramètre λp , Y de loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - p)$. Montrer que, conditionnellement en $Z = n$, X et Y ne sont pas indépendantes.