Université Paris EST- Créteil
Probabilités (2011 - 2012) L2

Feuille 1

Exercice 1: Montrer les propriétés suivantes.

1. $1_{A\cap B} = 1_A.1_B$.
2. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B$.
3. $1_{A^c} = 1 - 1_A$.
4. Si $\{A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ forment une partition, alors $1 = 1_{A_1} + \ldots + 1_{A_n}$.

Exercice 2: Soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition de Ω, et soit X une variable aléatoire qui s'ecrit

$$X = \mathbb{1}_{A_1} + 2.\ \mathbb{1}_{A_2} + \ldots + n.\ \mathbb{1}_{A_n}.$$

Ecrire X^2, et $\log(X)$ de la forme

$$a_1\ \mathbb{1}_{A_1} + a_2.\ \mathbb{1}_{A_2} + \ldots + a_n.\ \mathbb{1}_{A_n}.$$

Exercice 3: On reprent l'exemple 6 du cours: on dispose de 15 sacs contenant chacun un alphabet de 26 lettres $\mathcal{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots, \mathrm{z}\}$. On forme un mot de 15 lettres en piochant successivement une lettre dans chaque sac. Pour la lettre $\mathrm{x} \in \mathcal{A}$, on note B_{x}, l'évènement selon lequel la lettre x n'apparait pas dans le mot, et $A_{\mathrm{x}} = B_{\mathrm{x}}^c$.

- Dire en français ce que représente A_{x}?
- Que représente
$$N(\text{ø}) = \sum_{\mathrm{x}\in\mathcal{A}} 1_{A_{\mathrm{x}}}(\text{ø})?$$

Exercice 4: Une école propose trois cours de langue: anglais, arabe et espagnol. Ces cours sont ouverts aux 100 élèves de l'école, et nous disposons des informations suivantes.

- Il y a 28 élèves en anglais, 26 en arabe et 16 en espagnol.
- Il y a 12 élèves en anglais et arabe, 6 en arabe et espagnol, et 4 en anglais et espagnol.
- Il y en a 2 qui suivent les 3 langues.

On s'intéresse aux langues étudiées par un élève tiré au hasard. Décrire un espace des issues et les probabilités correspondantes. Quelle est la probabilité qu'un élève tiré au hasard suive une seule langue?

Exercice 5: On tire 3 cartes d'un jeux de 52 cartes. Construire un espace des issues et calculer les probabilités que

1. La première carte soit un 6?
2. la deuxième carte soit un 6?
3. La première soit un 6, la deuxième un roi de trèfle et la troisième un coeur?

Exercice 6: Un probabiliste veut faire ses courses sur la rue Saint-Férréol. Il commence au centre de la rue, disons en face du magasin 0. Les autres magasins sont disposés à gauche et à droite du centre, mais d'un seul côté de la rue. Vous pourrez numéroter les magasins à droite du magasin 0 par $1, 2, ...$, et ceux à gauche du magasin 0 par $-1, -2, -3, ...$. Il procède de la façon suivante:

- Il lance une pièce de monnaie bien équilibrée (Probabilité de voir pile est 1/2): si elle tombe sur pile, il entre dans le 1er magasin à sa droite (donc dans celui numéroté 1), et il se donne 15mn pour se promener dans le magasin; par contre, si la pièce donne face, alors il entre dans celui numéroté -1 et il se donne 15mn dans le magasin.
- Au bout de ces 15mn, il lance à nouveau sa pièce. Supposons qu'il soit dans le magasin 1. Si c'est pile qui sort, alors il entre dans celui numéroté 2, par contre si c'est face qui sort, alors il va dans celui numéroté 0, et dans les deux cas il y passe 15mn... et ainsi de suite...

- Il se donne un total de 1h (soit donc 4 visites de 15mn, et 4 lancers de pièce). (Faites un dessin, cela aidera).

On s'intérresse aux magasins visités par notre probabiliste pendant une heure.

- Modéliser cette situation: donner Ω et la probabilité associée P

Exercice 7: Un groupe de six hommes et six femmes est divisé au hasard en deux sous-groupes de même taille. On s'intéresse au nombre d'hommes dans le 1er sous-groupe.

1. Quel espace des issues choisissez-vous?
2. Ecrire les probabilités associées.
3. En moyenne, combien y-a-t'il d'hommes dans le 1er sous-groupe?

Exercice 8: Un facteur pressé distribue n lettres dans n boites de deux façons.

1. Il en met une par boite sans regarder les noms. Si on désigne par A_i l'évènement "la lettre destinée au locataire i lui arrive". Calculer $P(A_i), P(A_1 \cap A_2), P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ et $P(A_1 \cup A_2)$.
2. Il les distribue en oubliant où il en a déjà mis. Si B_i est "la boite du locataire i est vide". Calculer $P(B_i), P(B_1 \cap B_2), P(B_1 \cup B_2)$, et $P(B_1 \cup \ldots \cup B_n)$.