

Probabilités pour l'informatique
Correction du partiel du 8 mars 2011.

1 Question du cours.

T suit la loi géométrique de paramètre p . On a la moyenne et la variance de T :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \text{Var}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

2 Problème.

Jeux Pierre-Feuille-Ciseaux. Notons les coups respectivement par P, F et C.

Question 1. Dans cette question, les joueurs choisissent les coups de façon *équiprobable*.

a. On considère le premier jeu.

Un espace des issues :

$$\Omega = \{(P, P), (P, F), (P, C), (F, P), (F, F), (F, C), (C, P), (C, F), (C, C)\}$$

dont une issue comporte les coups joués par les deux joueurs A et B .

Dans cette question, les issues sont équiprobables. Donc la probabilité associée à chaque issue ω est donnée par

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{9}.$$

L'événement que A gagne correspond au sous-ensemble suivant

$$E_A = \{(P, C), (F, P), (C, F)\}.$$

Alors la probabilité que A gagne dans le premier jeu est

$$\mathbb{P}(E_A) = \frac{\text{card}(E_A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{3}.$$

Comme les joueurs A et B utilisent la même stratégie, la probabilité que B gagne est égale à la probabilité que A gagne, c.à.d.

$$\mathbb{P}(B \text{ gagne}) = \mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent, la probabilité d'un match nul est

$$\mathbb{P}(\text{match nul}) = 1 - \mathbb{P}(A \text{ gagne}) - \mathbb{P}(B \text{ gagne}) = \frac{1}{3}.$$

b. Notons X le nombre de jeux que A gagne parmi 10 jeux.

X suit la loi binômiale de paramètres (n, p) où $n = 10$ et $p = 1/3$. On a

$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = np(1-p) = \frac{20}{9}.$$

Question 2. Dans cette question, les joueurs choisissent les coups de façon *non équiprobable* :

- le joueur A choisit le coup Pierre, Feuille ou Ciseaux avec la probabilité $1/6$, $1/3$ ou $1/2$ respectivement,
- le joueur B choisit le coup Pierre, Feuille ou Ciseaux avec la probabilité $1/4$, $1/4$ ou $1/2$ respectivement,

a. On considère le premier jeu. On a toujours le même espace des issues :

$$\Omega = \{(P, P), (P, F), (P, C), (F, P), (F, F), (F, C), (C, P), (C, F), (C, C)\}$$

Mais les issues ne sont plus équiprobables et les probabilités associées sont données par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(P, P) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}, & \mathbb{P}(P, F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}, & \mathbb{P}(P, C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \\ \mathbb{P}(F, P) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, & \mathbb{P}(F, F) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, & \mathbb{P}(F, C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(C, P) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, & \mathbb{P}(C, F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, & \mathbb{P}(C, C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

L'événement que A gagne correspond toujours au sous-ensemble

$$E_A = \{(P, C), (F, P), (C, F)\},$$

mais la probabilité que A gagne est maintenant calculée par

$$\mathbb{P}(E_A) = \mathbb{P}(P, C) + \mathbb{P}(F, P) + \mathbb{P}(C, F) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}.$$

Un match nul correspond au sous-ensemble

$$E_{nul} = \{(P, P), (F, F), (C, C)\},$$

et la probabilité d'un match nul est calculée par

$$\mathbb{P}(\text{match nul}) = \mathbb{P}(P, P) + \mathbb{P}(F, F) + \mathbb{P}(C, C) = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

b. Notons X le nombre de jeux que A gagne parmi 10 jeux.

X suit la loi binômiale de paramètre (n, p) où $n = 10$ et $p = 7/24$. On a

$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{35}{12} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = np(1-p) = \frac{35}{12} \times \frac{17}{24}.$$