

L2-Math. et Info.

Examen de PROBABILITÉS.

Mardi 28 Juin 2010, 14:00-16:00

Résumé écrit à la main du cours (2 feuilles recto-verso) autorisé.

Les photocopies ne sont pas autorisées.

Les trois exercices sont indépendants. Commencer par celui qui vous semble le plus facile.

Exercice I Un sac contient 3 boules blanches, et 2 boules noires. On tire une boule au hasard. On gagne 2 euros si on tire une boule blanche, et on perd 4 euros si on tire une boule noire. On appelle G le gain.

1. Quel espace des issues choisissez-vous? Quelles sont les probabilités associées à cet espace des issues?
2. Quel est le gain moyen?

Sans remettre la boule tirée dans le sac, on tire une seconde boule dans le sac, cette fois encore au hasard.

3. Calculer la probabilité que la seconde boule soit noire sachant que la première est blanche.

On s'intéresse au nombre total de boules noires tirées (en les deux coups).

4. Quel espace des issues choisissez-vous? Quelles sont les probabilités associées à cet espace des issues?

Exercice II On considère un espace Ω et une probabilité P . Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère une suite de variables $X_1, X_2, \dots, X_n \in \{0, 1\}$ avec

$$P(\omega : X_1(\omega) = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(\omega : X_2(\omega) = 1) = \frac{1}{2^2}, \quad P(\omega : X_n(\omega) = 1) = \frac{1}{2^n}.$$

Noter que pour $k = 1, \dots, n$, $P(\omega : X_k(\omega) = 0) = 1 - P(\omega : X_k(\omega) = 1)$. On suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et on forme

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de X_1 , X_2 et X_n .
2. Calculer l'espérance et la variance de S_n . Calculer la limite de $E[S_n]/n$, lorsque n tend vers l'infini.

Exercice III Considérons un jeu de fléchettes sur une cible $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. On lance la fléchette uniformément au hasard dans la cible. On note $\dagger = (x, y)$ la position de la fléchette sur la cible, et on pose $X(\dagger) = x$, et $Y(\dagger) = y$. Un joueur gagne lorsque $X(\dagger) > Y^2(\dagger)$.

1. Faire un dessin de la cible et de la zone gagnante $\{(x, y) : x > y^2\}$.
2. Modéliser ce jeu (donner Ω , et la probabilité associée).
3. Quelles sont les densités de X et de Y ?
4. Quelle est la probabilité que notre joueur gagne?