Université Paris 12
Licences d'Informatique et de Mathématiques
2007-08

TD de Mathématiques Discrètes
TD 5 - Théorie des nombres

Mars 2008

Exercice 1 : Nombres de Mersenne, nombres de Fermat

1. *Nombres de Mersenne.* Soient $a \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers. Si $a^n - 1$ est un nombre premier, montrer que $a = 2$ et que n est premier.
2. *Nombres de Fermat.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $2^n + 1$ est premier, montrer que n est une puissance de 2.
3. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$, pour tout entier naturel n. Montrer que les nombres F_n, pour $n \in \mathbb{N}$, sont premiers entre eux deux à deux. En déduire une autre démonstration du fait qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 2

Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444} (écrit dans le système décimal) et B la somme des chiffres de A. Que vaut C, la somme des chiffres de B ?

Exercice 3

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $6k - 1$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 : Nombres parfaits

1. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. Exprimer $\sigma(n)$ en fonction des termes intervenant dans la décomposition de n en facteurs premiers. Montrer que
$$\mathrm{pgcd}(m, n) = 1 \Longrightarrow \sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$$
2. On dit qu'un entier naturel non nul n est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même (c'est-à-dire si $\sigma(n) = 2n$). Si $2^p - 1$ est un nombre premier, montrer que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.
3. Réciproquement, démontrer qu'un nombre parfait pair n est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$, où $2^p - 1$ est nécessairement premier.

Exercice 5 : Théorème de Liouville

Soit $p > 5$ un entier. Montrer que l'équation en $m \in \mathbb{N}^*$
$$(p-1)! + 1 = p^m$$
n'a pas de solution.

Exercice 6 : Algorithme d'Euclide étendu

1. Quel est le *pgcd* de 49 et 72 ?
2. Trouver des coefficients entiers u et v tels qu'on a $\mathrm{pgcd}(49, 72) = 49u + 72v$.
3. Donner l'inverse de 49 dans $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$.
4. Refaire les questions 1 et 2 avec 436 et 237, ainsi que 534 et 408.
5. Trouver les inverses de 169, 187, 338 et 209 dans $\mathbb{Z}/420\mathbb{Z}$.

Exercice 7 : Congruences

1. Résoudre l'équation $7x \equiv 2 \mod 9$.
2. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lllll} 3x & \equiv & 2 & \mod & 11 \\ 3x & \equiv & 4 & \mod & 7 \end{array} \right.$$

Exercice 8 : Théorème de Wilson

Montrer qu'un entier $p \geq 2$ est un nombre premier si et seulement si

$$(p-1)! = -1 \mod p$$