Université Paris 12
Licences d'Informatique et de Mathématiques
2007-08

TD de Mathématiques Discrètes
TD 4 - Théorie des nombres

Mars 2008

Exercice 1 : Nombres premiers

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, il existe un suite $(v_p(n))_{p\in\mathcal{P}}$ d'entiers naturels nuls sauf un nombre fini d'entre eux vérifiant

$$n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

Cette écriture s'appelle la décomposition en facteurs premiers de l'entier n.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers des entiers $10, \dots, 14$.
2. Pour tout entier naturel non nul n, prouver l'unicité de la suite $(v_p(n))_{p\in\mathcal{P}}$.
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Donner la décomposition en facteurs premiers des entiers $\mathrm{pgcd}(m, n)$ et $\mathrm{ppcm}(m, n)$ en fonction de la décomposition de m et celle de n.
4. Montrer que $\mathcal{P}$ est infini.
5. Trouver un entier naturel non nul n vérifiant $n! + 1 \notin \mathcal{P}$.
6. Trouver un entier naturel non nul n vérifiant
$$1 + \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\leq n}} p \notin \mathcal{P}$$
7. Soit n est un entier naturel non nul qui n'appartient pas à $\mathcal{P}$. Établir l'existence d'un entier p vérifiant simultanément $p|n$ et $p^2 \leq n$.

Exercice 2 : Indicateur d'Euler

On note $\varphi(n)$ l'indicateur d'Euler d'un entier $n \geq 2$, c'est-à-dire le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n.

1. Calculer $\varphi(n)$, pour $n \in \{15, \dots, 19\}$.
2. Pour n compris entre 10 et 14, vérifier que
$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$
3. Démontrer l'égalité précédente, pour $n \geq 2$ quelconque.

Exercice 3 : Algorithme d'Euclide

1. Soient a et b deux entiers naturels vérifiant $1 \leq b \leq a$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, a \bmod b)$ et que $\mathrm{pgcd}(b, 0) = b$.
2. En déduire $\mathrm{pgcd}(325, 214)$, puis $pgcd(1170, 1326)$.

Exercice 4

1. On admet que 1999 est premier. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant simultanément $a + b = 11994$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1999$.
2. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels non nuls vérifiant $\mathrm{pgcd}(a, b) + \mathrm{ppcm}(a, b) = b + 9$.
3. Même question avec $2\,\mathrm{ppcm}(a, b) + 7\,\mathrm{pgcd}(a, b) = 111$.