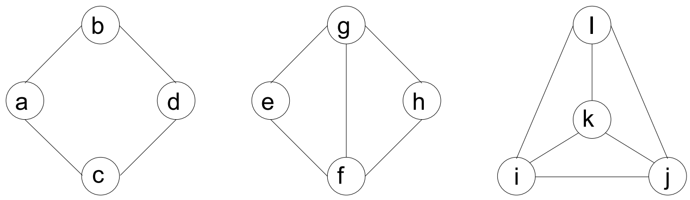
Université Paris 12
Licences d'Informatique et de Mathématiques
2007-08

TD de Mathématiques Discrètes
TD 3 - Graphes k-connexes, blocs, graphes orientés

Février 2008

Exercice 1 : Arbres couvrants

Combien d'arbres couvrants les graphes suivants possèdent-ils ?



Exercice 2 : k-connexité et arête-connexité

Définition 1 *Le* nombre de connexité $\kappa(G)$ *d'un graphe G est le plus petit nombre de sommets dont la suppression rend G non connexe ou réduit à un seul sommet.*
Le nombre d'arêtes-connexité $\kappa'(G)$ *d'un graphe G tel que $n > 1$ est le plus petit nombre d'arêtes dont la suppression rend le graphe non connexe, et c'est 0 si G n'est pas connexe ou si n=1.*

On note δ_G le degré minimum de G.

Démontrer la proposition suivante et donner des exemples dans lesquels les inégalités sont strictes.

Proposition 1 *Pour tout graphe G, on a* $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta_G$

Exercice 3 : Matrices d'adjacence

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G. Soit $x_1, \ldots, x_n$ l'ensemble des sommets de G. Montrer que le terme (i, j) de M^k est le nombre de chemins (élémentaires ou non) de longueur k entre x_i et x_j.

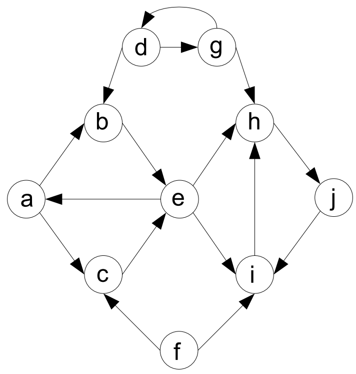
Exercice 4 : Orientation des graphes

Étant donné un graphe non orienté G simple, montrer qu'il y a 2^m graphes orientés dont le graphe non orienté associé est G. Qu'en est-il pour les graphes non simples ?

Exercice 5 : Graphe réduit

Définition 2 *Soit G un graphe orienté. On appelle* graphe réduit *de G le graphe orienté dont les sommets sont les composants fortement connexes $C_1, \ldots, C_p$ de G et les arcs les couples (C_i, C_j) tels qu'il existe dans G un arc d'un sommet de C_i à un sommet de C_j.*

1. Construisez le graphe réduit associé au graphe orienté suivant. Précisez à quels sommets correspond chaque C_i.



2. Montrer qu'un graphe réduit est sans circuits.

Exercice 6 : Décomposition en blocs

On considère des graphes sans boucles.

Définition 3 *Un* bloc *d'un graphe G est un sous-graphe engendré connexe et sans point d'articulation (de lui-même en tant que graphe), maximal avec ces propriétés.*

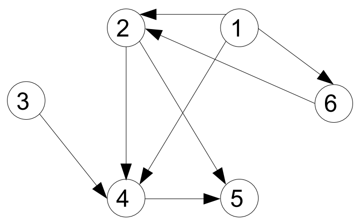
Montrer que :
- les blocs définissent une partition de l'ensemble des arêtes de G,
- deux blocs n'ont en commun qu'au plus un sommet qui est alors point d'articulation de G, et inversement que
- tout point d'articulation est un sommet commun à au moins deux blocs de G.

Exercice 7 : Arbre

Tout arbre fini avec au moins deux sommets comporte au moins deux sommets pendants (ou feuilles)

Exercice 8 : Degrés

Trouvez les degrés extérieurs et intérieurs de chacun des sommets du graphe ci-dessous :



Exercice 9 : Arborescence

Combien d'arborescences existe-t-il sur n sommets numérotés ?