

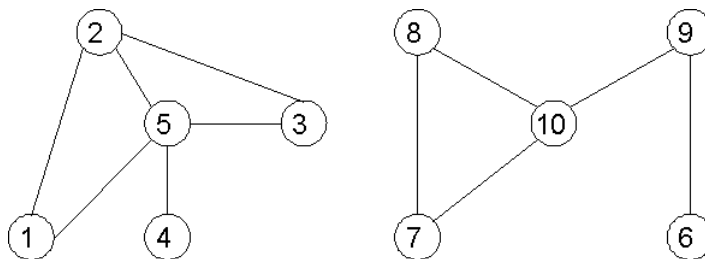
TD de Mathématiques Discrètes
TD 1 - Introduction à la théorie des graphes

Janvier 2008

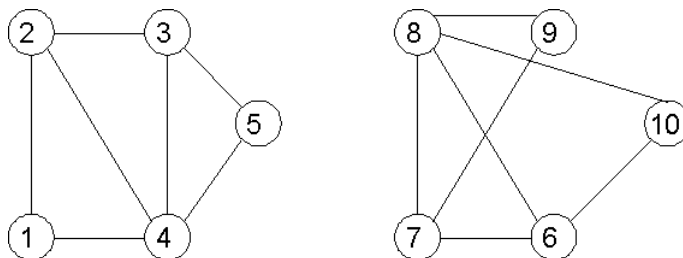
Exercice 1 : Isomorphismes

1. Pour chaque couple de graphes suivants, dire s'ils sont isomorphes et justifier dans chaque cas.

(a) Premier couple



(b) Deuxième couple



Définition 1 Un graphe G est dit connexe si deux quelconques de ses sommets sont reliés par une chaîne.

2. Trouver deux graphes simples connexes ayant le même nombre d'arêtes et qui ne soient pas isomorphes.
3. Trouver tous les graphes simples non isomorphes à 4 sommets.

Exercice 2 : degrés des sommets

Démontrer que, pour tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Application : Soit un groupe de 9 personnes. Chaque jour, pour se dire bonjour, chacune de ces personnes serre la main à 3 personnes et embrasse les 5 autres. Montrer que c'est impossible.

Exercice 3 : Chaînes

Montrer que si dans un graphe deux sommets sont reliés par une chaîne alors ils sont reliés par une chaîne *élémentaire*.

Exercice 4 :

Soit G un graphe simple ayant n sommets ($n > 1$).

1. Montrer que le degré d'un sommet est toujours strictement inférieur à n .
2. Montrer qu'il ne peut pas y avoir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n - 1$.
3. En déduire qu'il y a au moins deux sommets de même degré.

Exercice 5 :

Définition 2 Soit $G = (X, E)$ un graphe. Un triangle de G est un triplet de sommets distincts x, y, z de X tels que xy, yz et zx appartiennent à E .

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple. Supposons que G ne contienne pas de triangles.

1. Montrer que pour deux sommets voisins distincts x et y , le nombre n_x de sommets de $X \setminus \{x, y\}$ voisins de x et le nombre n_y de sommets de $X \setminus \{x, y\}$ voisins de y satisfont l'inégalité

$$n_x + n_y \leq n - 2$$

2. En déduire, par induction sur le nombre n de sommets, que le nombre m d'arêtes vérifie

$$m \leq \frac{n^2}{4}$$