Théorie des Graphes

10. Arbres

Définition

Arbre = graphe connexe et *acyclique*

Théorie des Graphes

10. Arbres

Définition

Arbre = graphe connexe et *acyclique*

connexe = deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne

acyclique = sans cycle (chaîne fermée, simple de longueur ≥ 1)

Théorie des Graphes

10. Arbres

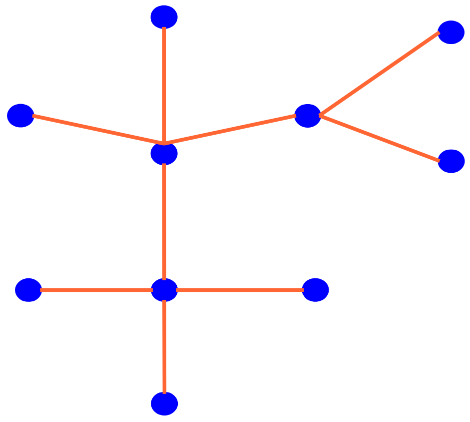
Définition

Arbre = graphe connexe et *acyclique*

connexe = deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne

acyclique = sans cycle (chaîne fermée, simple de longueur ≥ 1)

Exemple.



Théorie des Graphes

10. Arbres

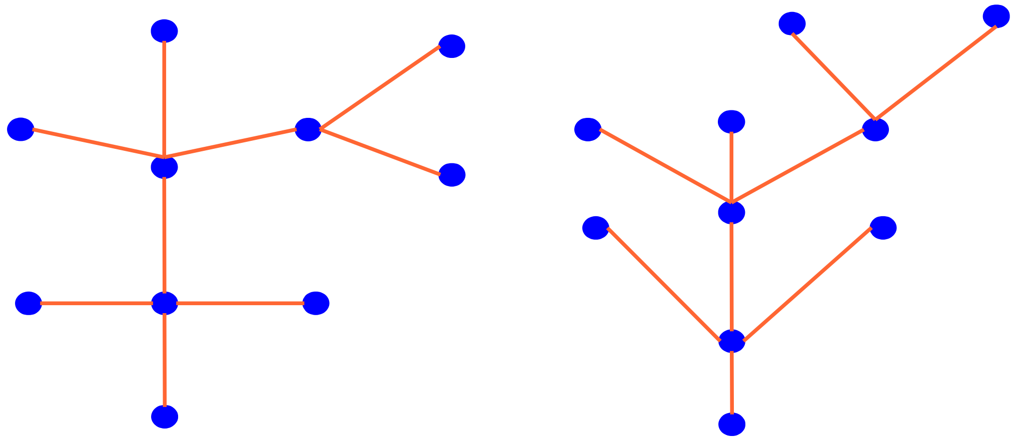
Définition

Arbre = graphe connexe et *acyclique*

connexe = deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne

acyclique = sans cycle (chaîne fermée, simple de longueur ≥ 1)

Exemple.



Théorie des Graphes

10. Arbres

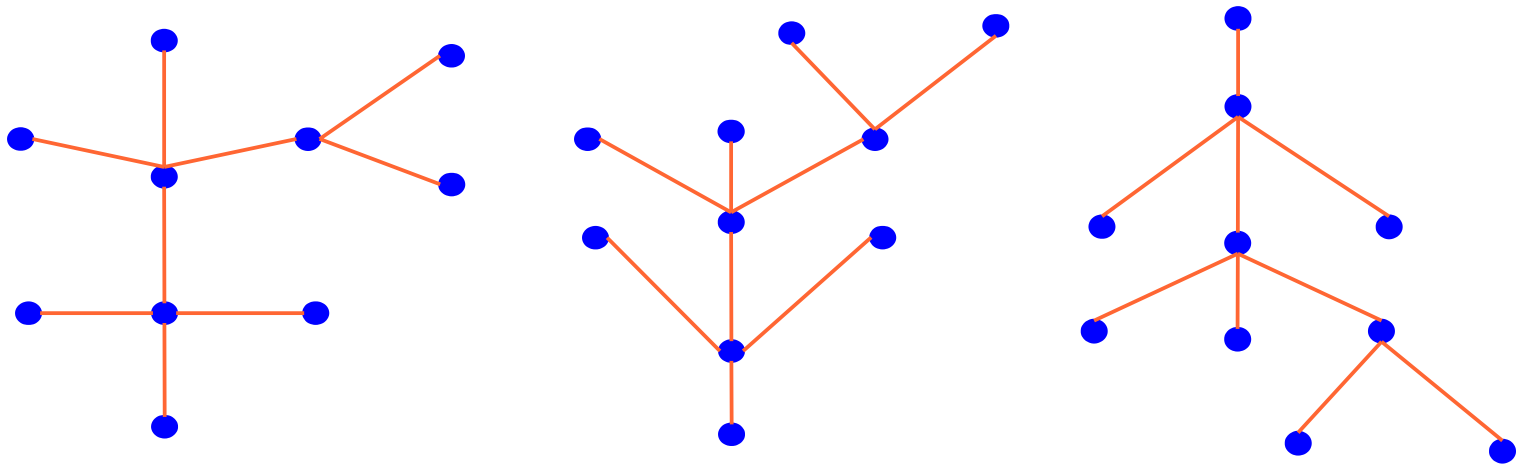
Définition

Arbre = graphe connexe et *acyclique*

connexe = deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne

acyclique = sans cycle (chaîne fermée, simple de longueur ≥ 1)

Exemple.



Théorie des Graphes

10. Arbres

Propriété

Un arbre est un graphe simple

Simple = ni de boucles, ni d'arêtes multiples

Théorie des Graphes

10. Arbres

Propriété

Une chaîne élémentaire est un arbre

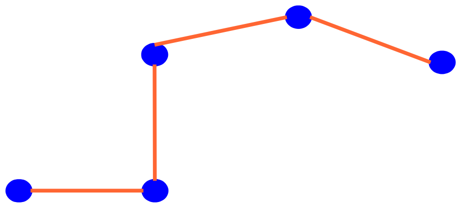
Théorie des Graphes

10. Arbres

Propriété

Une chaîne élémentaire est un arbre

Élémentaire = les sommets deux à deux disjoints



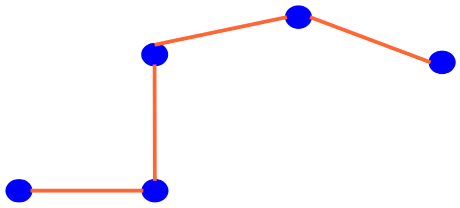
Théorie des Graphes

10. Arbres

Propriété

Une chaîne élémentaire est un arbre

Élémentaire = les sommets deux à deux disjoints



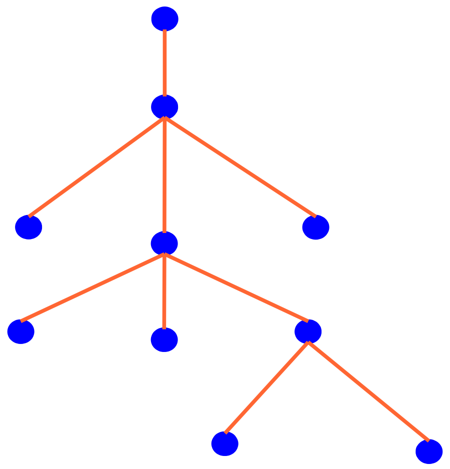
Preuve. Simple $\leftarrow$ élémentaire

Acyclique: une sous chaîne qcq ne peut pas être fermée

Théorie des Graphes

10. Arbres

Définition (sommet pendant)
Sommet *pendant* = sommet de degré 1



Théorie des Graphes

10. Arbres

Définition (sommet pendant)
Sommet *pendant* = sommet de degré 1

Proposition.
Soit un arbre dont le nombre de sommets $n \geq 2$.
Cet arbre possède au moins 2 sommets pendants.

Théorie des Graphes

10. Arbres

Définition (sommet pendant)
Sommet *pendant* = sommet de degré 1

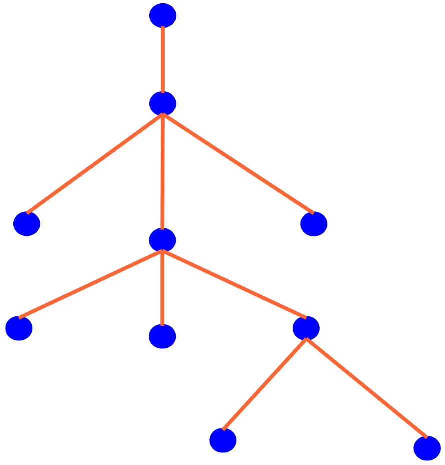
Proposition.
Soit un arbre dont le nombre de sommets $n \geq 2$.
Cet arbre possède au moins 2 sommets pendants.

Preuve. Considérer la chaîne élémentaire maximale.

Théorie des Graphes

10. Arbres

Proposition.
Dans un arbre, $m = n - 1$.



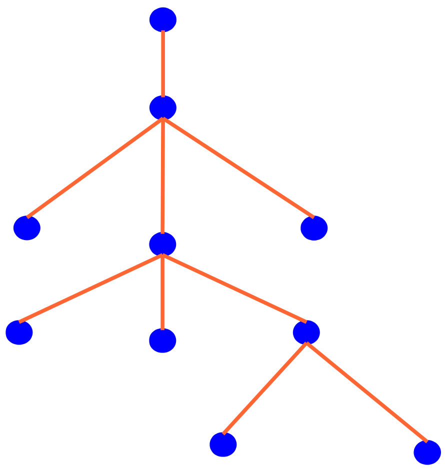
Théorie des Graphes

10. Arbres

Proposition.

Dans un arbre, $m = n - 1$.

Preuve. Par récurrence sur n.

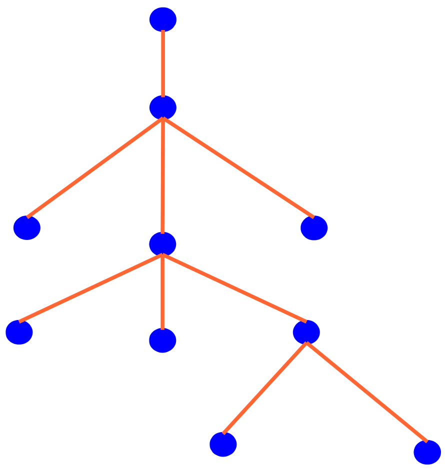


Théorie des Graphes

10. Arbres

Proposition.

Dans un arbre, deux sommets distincts qcq sont reliés par une chaîne élémentaire unique.

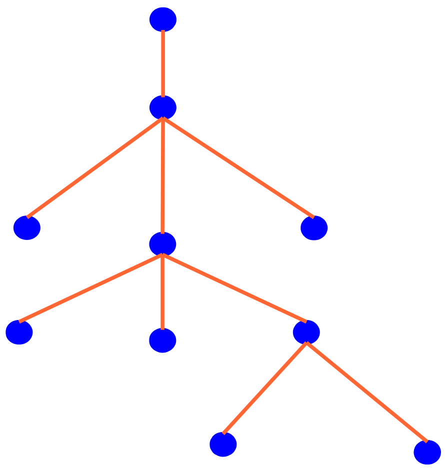


Théorie des Graphes

10. Arbres

Proposition.
Dans un arbre, deux sommets distincts qcq sont reliés par une chaîne élémentaire unique.

Preuve. Existence d'une chaîne élémentaire reliant deux sommets
+ Unicité.



Théorie des Graphes

10.1. Forêts

Définition

Forêt = graphe acyclique

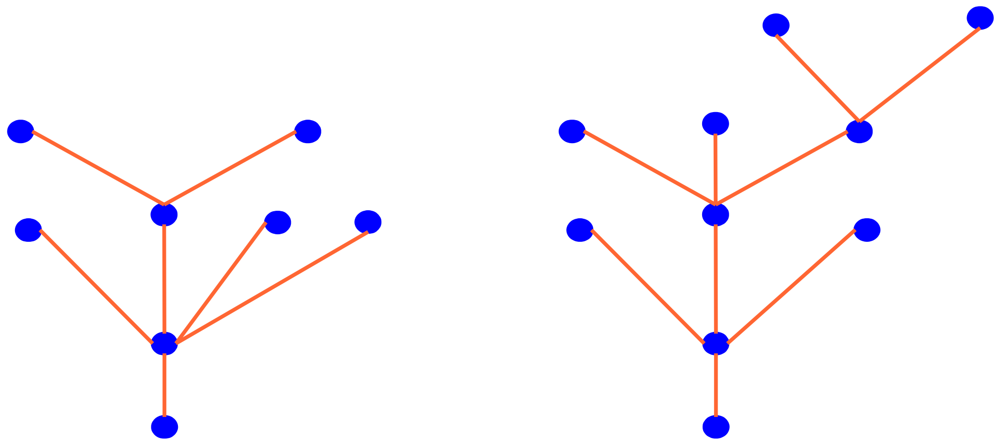
Théorie des Graphes

10.1. Forêts

Définition

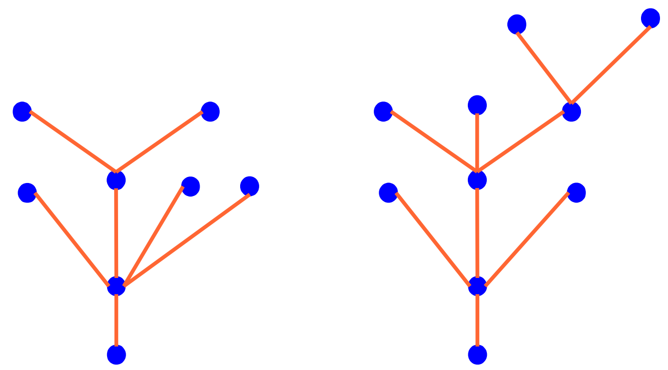
Forêt = graphe acyclique

Exemple.



Théorie des Graphes

10.1. Forêts



Définition

Forêt = graphe acyclique

Propriétés.

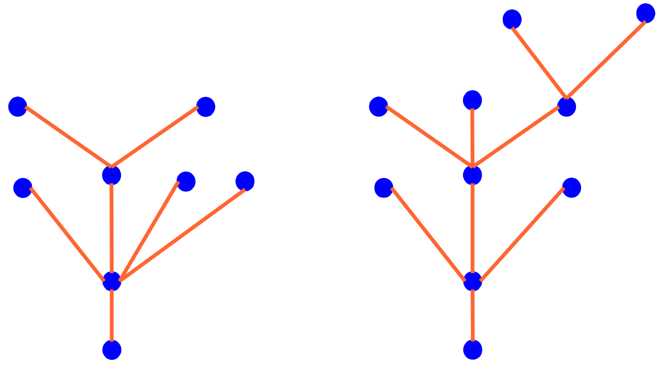
- Une forêt peut être non connexe
- Les composantes connexes d'une forêt sont les arbres (d'où la terminologie, les forêts généralisent les arbres)

Théorie des Graphes

10.1. Forêts

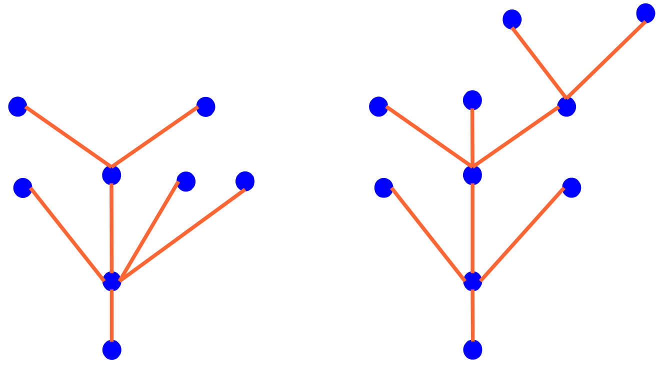
Proposition

Dans une forêt, $m \leq n-1$.
Égalité ssi il s'agit d'un arbre.



Théorie des Graphes

10.1. Forêts



Proposition

Dans une forêt, $m \leq n-1$.
Égalité ssi il s'agit d'un arbre.

Preuve. Considérer les composantes connexes.

Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Définition

Un *isthme* d'un graphe G = une arête e t.q. *G-e a une composante connexe de plus que* G.

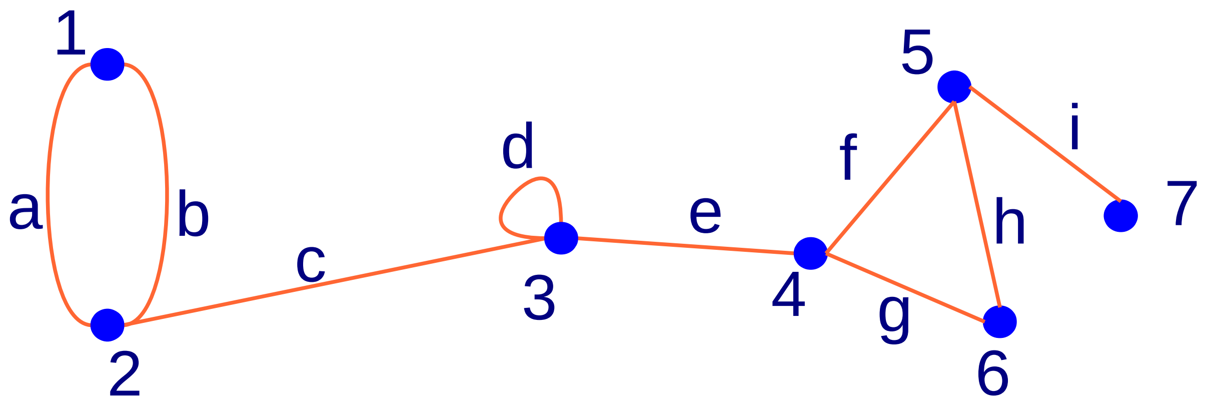
Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Définition

Un *isthme* d'un graphe G = une arête e t.q. *G-e a une composante connexe de plus que G*.

Exemple.



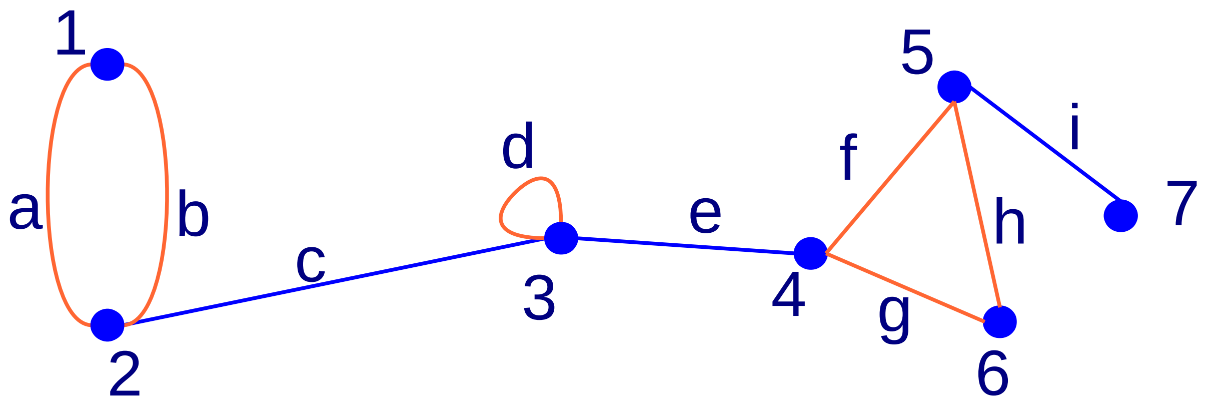
Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Définition

Un *isthme* d'un graphe G = une arête e t.q. *G-e a une composante connexe de plus que G*.

Exemple.



Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Propriétés.

L'arête e est un isthme dans G ssi les extrémités de e ne sont reliés par aucune chaîne dans G-e

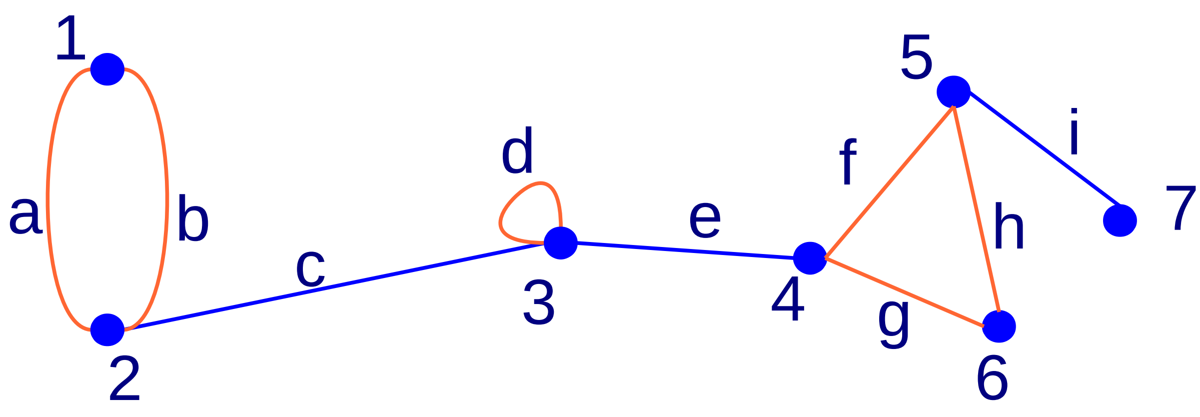
Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Propriétés.

L'arête e est un isthme dans G ssi les extrémités de e ne sont reliés par aucune chaîne dans G-e

Exemple.



Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Propriétés.

L'arête e est un isthme dans G ssi les extrémités de e ne sont reliés par aucune chaîne dans G-e

On dit parfois que l'arête e sépare ses extrémités x et y

10.2. Isthmes

Propriétés.

L'arête e est un isthme dans G ssi les extrémités de e ne sont reliés par aucune chaîne dans G-e

On dit parfois que l'arête e sépare ses extrémités x et y

Lorsque G est connexe, e est un isthme ssi G-e n'est pas connexe

Théorie des Graphes

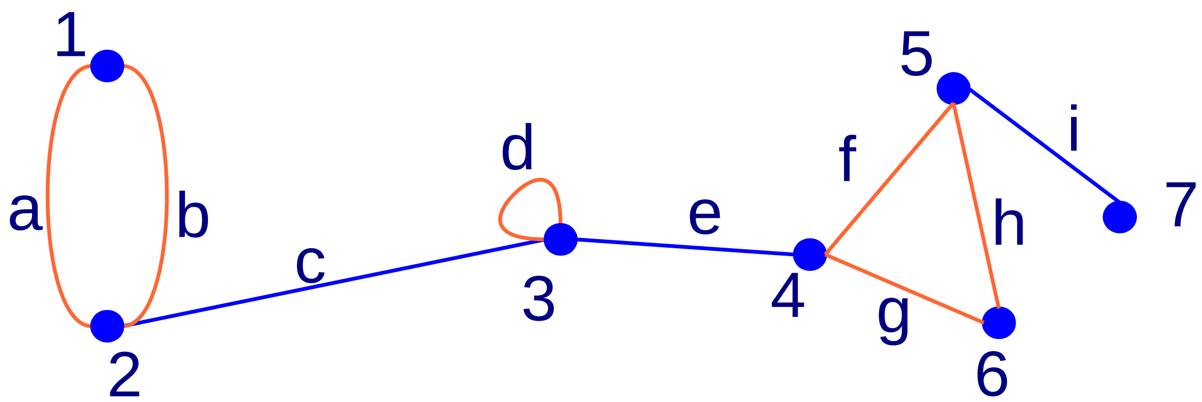
10.2. Isthmes

Propriétés.
L'arête e est un isthme dans G ssi les extrémités de e ne sont reliés par aucune chaîne dans G-e

On dit parfois que l'arête e sépare ses extrémités x et y

Lorsque G est connexe, e est un isthme ssi G-e n'est pas connexe

Exemple.



Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Proposition.

Une arête e est un isthme dans G ssi elle n'appartient pas à un cycle de G

Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Proposition.

Une arête e est un isthme dans G ssi elle n'appartient pas à un cycle de G

Indication. Il suffit de considérer le cas où G est connexe

Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Proposition.
Une arête e est un isthme dans G ssi elle n'appartient pas à un cycle de G

Corollaire.
Dans un arbre, toute arête est un isthme.

Théorie des Graphes

10.2. Isthmes

Proposition.

Une arête e est un isthme dans G ssi elle n'appartient pas à un cycle de G

Corollaire.

Dans un arbre, toute arête est un isthme.

Preuve. Proposition précédent + définition d'un arbre.

Théorie des Graphes

10.3. Caractérisations des arbres

Théorème.

Les conditions suivantes pour un graphe sont équivalentes

1. G est un arbre
2. G est connexe & on a $m=n-1$
3. G est acyclique & on a $m=n-1$
4. G est connexe & toute arête est un isthme
5. Deux sommets qcq sont reliés par une chaîne élémentaire unique.

Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Définition.

arbre couvrant = graphe partiel qui est un arbre

Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Définition.

arbre couvrant = graphe partiel qui est un arbre

Rappel. Graphe partiel = sous graphe contenant tous sommets

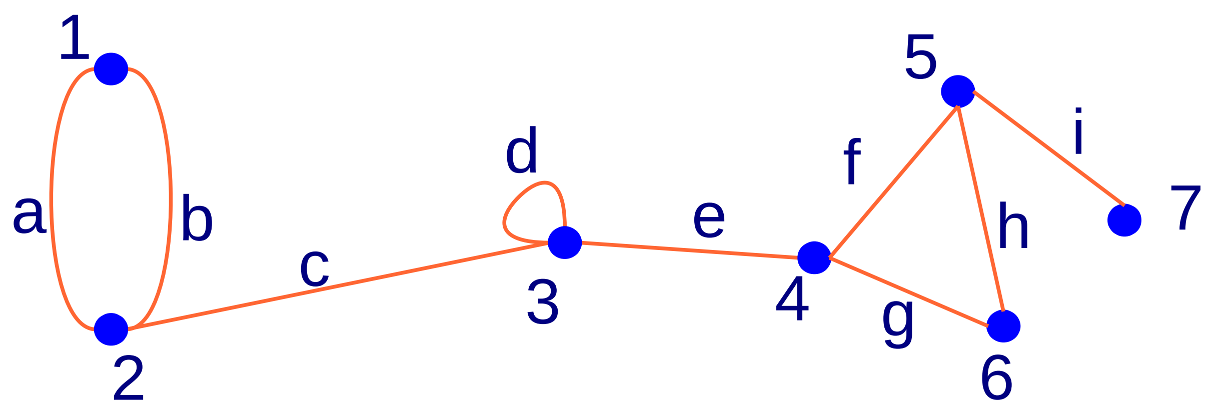
Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Définition.
arbre couvrant = graphe partiel qui est un arbre

Rappel. Graphe partiel = sous graphe contenant tous sommets

Exemple. Trouver un arbre couvrant du graphe ci-dessous



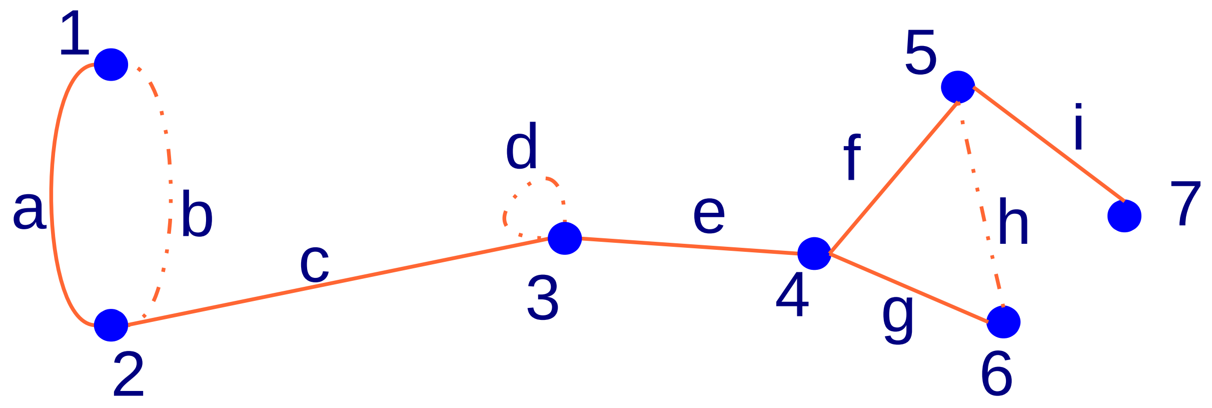
Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Définition.
arbre couvrant = graphe partiel qui est un arbre

Rappel. Graphe partiel = sous graphe contenant tous sommets

Exemple. Trouver un arbre couvrant du graphe ci-dessous



Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

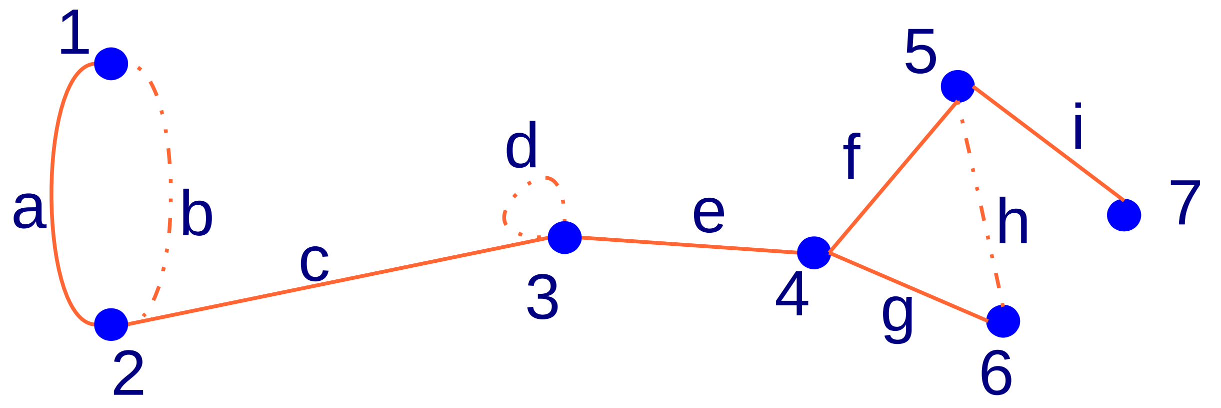
Proposition.
Un graphe connexe admet au moins un arbre couvrant.

Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.
Un graphe connexe admet au moins un arbre couvrant.

Exemple.



Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.
Un graphe connexe admet au moins un arbre couvrant.

Corollaire.
Dans un graphe G connexe, on a

$$m \geq n - 1$$

Égalité ssi G est un arbre.

Théorie des Graphes

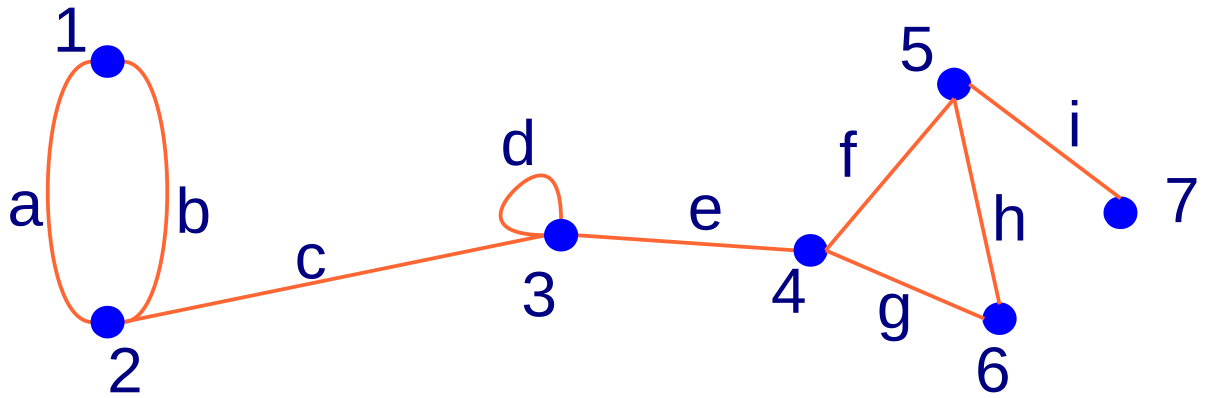
10.3. Arbres couvrants

Proposition.
Un graphe connexe admet au moins un arbre couvrant.

Corollaire.
Dans un graphe G connexe, on a

$$m \geq n - 1$$

Égalité ssi G est un arbre.



$m = 9$
$n = 7$

Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.
Un graphe connexe admet au moins un arbre couvrant.

Corollaire.
Dans un graphe G connexe, on a

$$m \geq n - 1$$

Égalité ssi G est un arbre.

Preuve. Application de la proposition précédente.

Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.

Soit un graphe partiel d'un graphe connexe G.

Il est un arbre (couvrant) ssi il est connexe & minimal.

minimal = si l'on supprime une arête qcq de ce graphe partiel, il n'est plus connexe

Théorie des Graphes

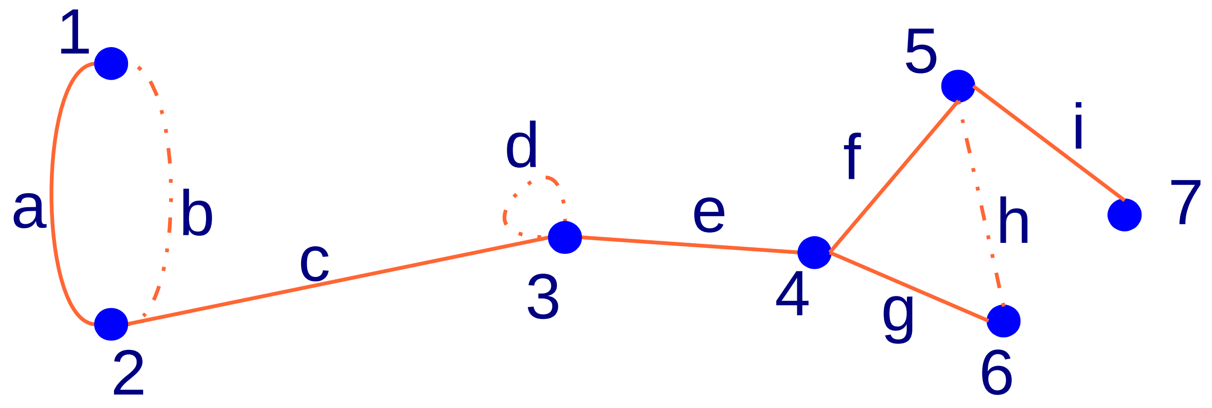
10.3. Arbres couvrants

Proposition.

Soit un graphe partiel d'un graphe connexe G.

Il est un arbre (couvrant) ssi il est connexe & minimal.

minimal = si l'on supprime une arête qcq de ce graphe partiel, il n'est plus connexe



Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.
Soit un graphe partiel d'un graphe connexe G.
Il est un arbre (couvrant) ssi il est connexe & minimal.

minimal = si l'on supprime une arête qcq de ce graphe partiel, il n'est plus connexe

Preuve. Application de la 4ème caractérisation des arbres:
« un graphe est un arbre ssi il est connexe et toute arête est un isthme »

Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.

Soit un graphe partiel d'un graphe connexe G.

Il est un arbre (couvrant) de G ssi il est acyclique & maximal.

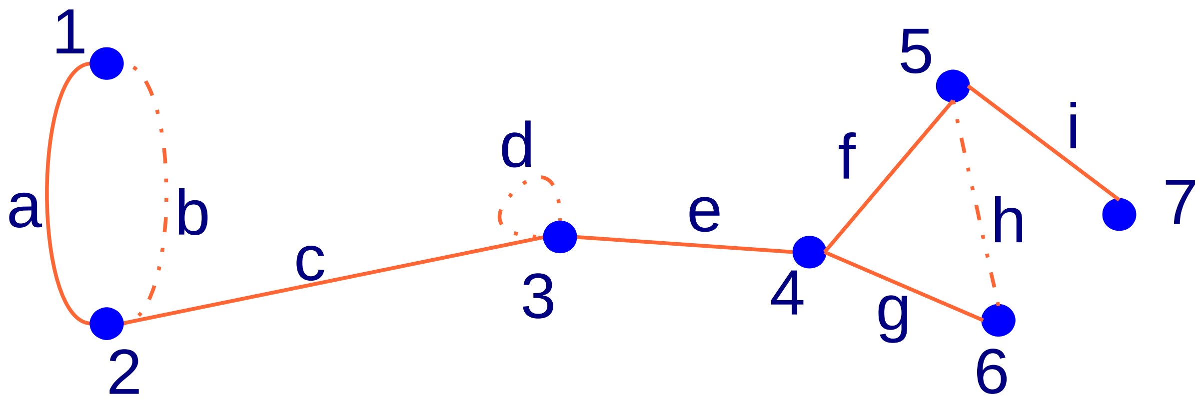
maximal = si l'on ajoute une arête qcq dans ce graphe partiel, il n'est plus acyclique

Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.
Soit un graphe partiel d'un graphe connexe G.
Il est un arbre (couvrant) de G ssi il est acyclique & maximal.

maximal = si l'on ajoute une arête qcq dans ce graphe partiel, il n'est plus acyclique



Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.

Soient un arbre couvrant T et une arête e d'un graphe G, e n'appartient pas dans T:

Le graphe partiel T+e contient un seul cycle élémentaire.

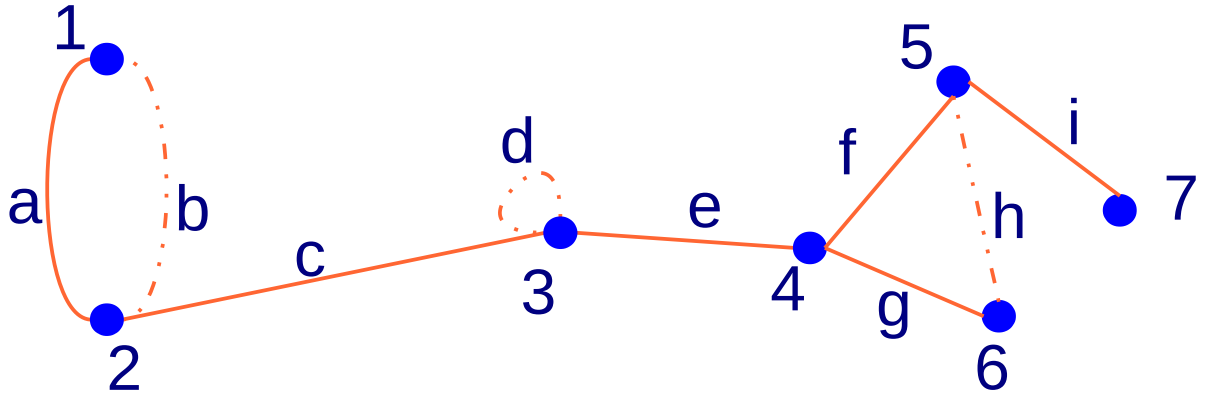
Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.

Soient un arbre couvrant T et une arête e d'un graphe G, e n'appartient pas dans T:

Le graphe partiel T+e contient un seul cycle élémentaire.



Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Proposition.

Soient un arbre couvrant T et une arête e d'un graphe G, e n'appartient pas dans T:

Le graphe partiel T+e contient un seul cycle élémentaire.

Lemme (d'échange).

Soient un arbre couvrant T et une arête e d'un graphe G, e n'appartient pas dans T.

Soit f une arête du cycle de T+e.

T+e-f est un arbre couvrant de G.

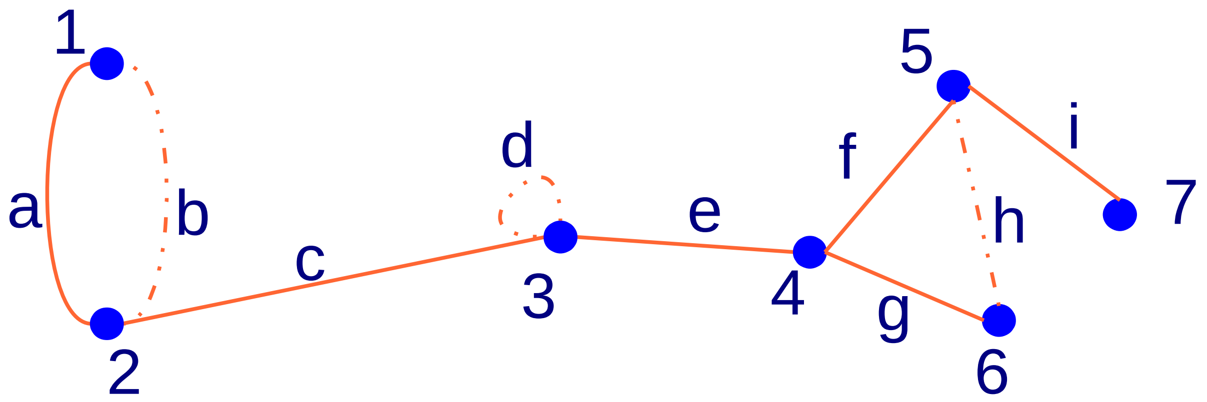
10.3. Arbres couvrants

Lemme (d'échange).

Soient un arbre couvrant T et une arête e d'un graphe G, e n'appartient pas dans T.

Soit f une arête du cycle de T+e.

T+e-f est un arbre couvrant de G.



Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Lemme (d'échange forte).
Soient deux arbres couvrants T et T' de G, une arête e dans T\T'.
Il existe une arête f dans T'\T t.q. T+e-f et T'+f-e sont deux arbres couvrants de G.

T\T' désigne l'esnsemble des arêtes dans T qui ne sont pas dans T'

Théorie des Graphes

10.3. Arbres couvrants

Lemme (d'échange forte).
Soient deux arbres couvrants T et T' de G, une arête e dans T'\T.
Il existe une arête f dans T\T' t.q. T+e-f et T'+f-e sont deux arbres couvrants de G.

T\T' désigne l'esnsemble des arêtes dans T qui ne sont pas dans T'