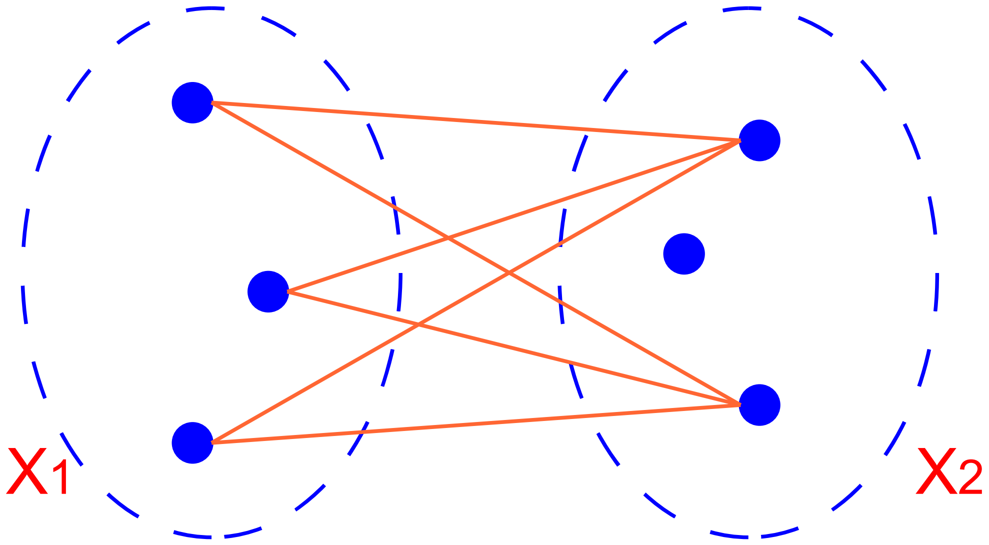
Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Un graphe $G=(X,E)$ est *biparti* si
X peut être divisé en deux parties X_1 et X_2, appelées *classes :*
disjointes: $X_1 \cap X_2 = \emptyset$
recouvrant l'ensemble: $X_1 \cup X_2 = X$
et toute arête a une extrémité dans chaque classe.

Exemple.



Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Théorème (Caractérisation)
Un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycles impairs

Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Théorème (Caractérisation)
Un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycles impairs

Rappel
Cycle = chaîne simple fermée :
$(x0, e1, x1, \dots ek, x0)$

Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Théorème (Caractérisation)
Un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycles impairs

Rappel
Cycle = chaîne simple fermée :

(x0, e1, x1, … ek, x0)

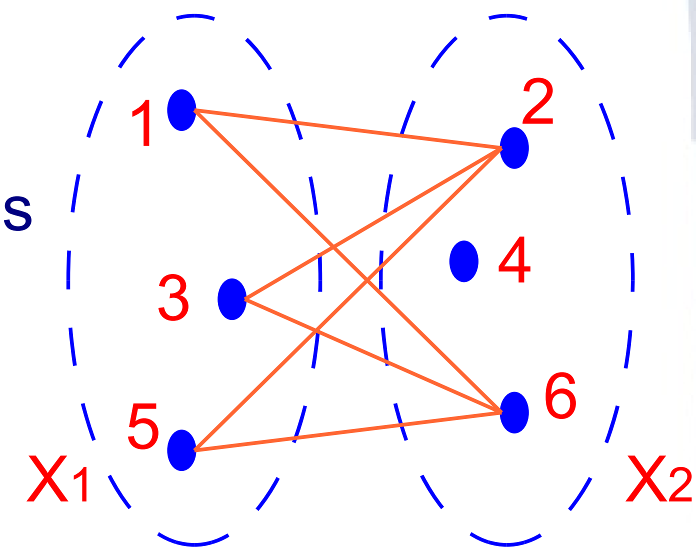
Fermée : extrémités coincïdent x0 = x0
Simple : e1 … ek deux à deux distinctes

Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Théorème (Caractérisation)
Un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycles impairs

Rappel
Cycle = chaîne simple fermée :
(x0, e1, x1, … ek, x0)
Fermée : extrémités coincïdent x0 = x0
Simple : e1 … ek deux à deux distinctes



Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Théorème (Caractérisation)
Un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycles impairs

Condition nécessaire (biparti $\rightarrow$ pas de cycles impairs)
Par l'absurde !!!

Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Théorème (Caractérisation)
Un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycles impairs

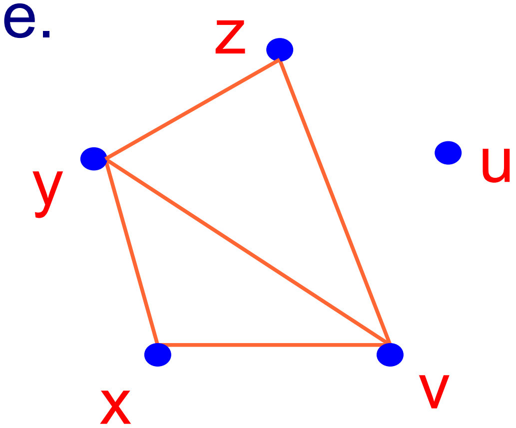
Condition nécessaire (biparti $\rightarrow$ pas de cycles impairs)
Par l'absurde !!!

Condition suffisante (pas de cycles impairs $\rightarrow$ biparti)
Construction d'une bipartition.

Théorie des Graphes

8. Représentation en machine des graphes simples

Exemple.

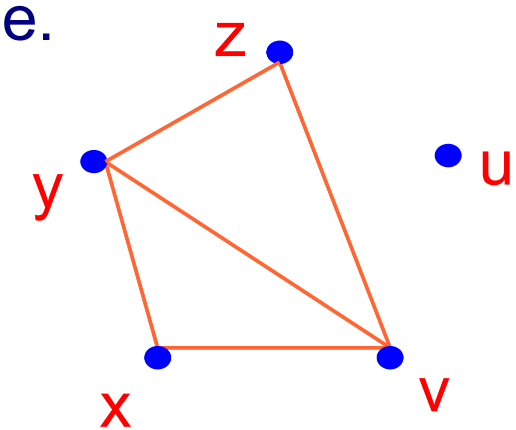


Graphe

Théorie des Graphes

8. Représentation en machine des graphes simples

Exemple.



Graphe

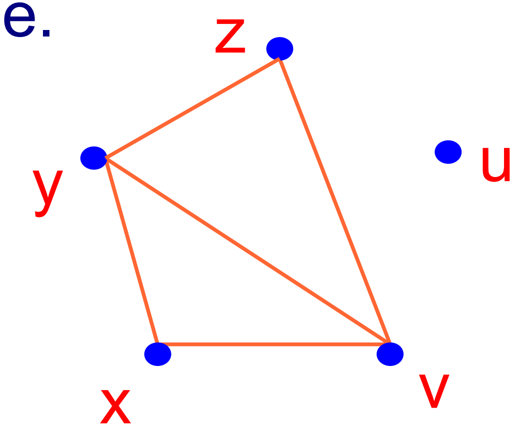
	u	v	x	y	z
u	0	0	0	0	0
v	0	0	1	1	1
x	0	1	0	1	0
y	0	1	1	0	1
z	0	1	0	1	0

Matrice d'adjacence

Théorie des Graphes

8. Représentation en machine des graphes simples

Exemple.



Graphe

	u	v	x	y	z
u	0	0	0	0	0
v	0	0	1	1	1
x	0	1	0	1	0
y	0	1	1	0	1
z	0	1	0	1	0

Matrice d'adjacence

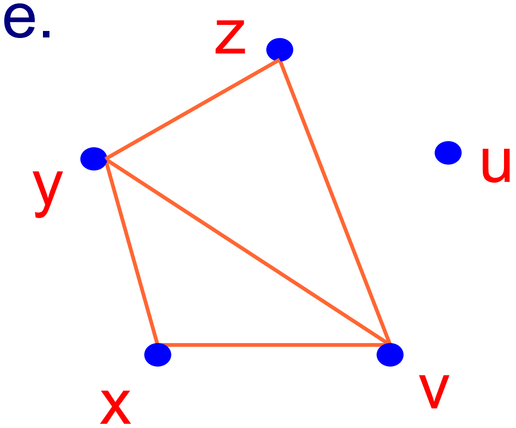
Principe.

- Les lignes et colonnes sont indexés par les sommets u,v,x,y,z
- Si les sommets x,y sont reliés par une arête,
  mettre 1 dans les cases m(x,y) et m(y,x)
- Sinon, mettre 0 dans ces cases.

Théorie des Graphes

8. Représentation en machine des graphes simples

Exemple.



	u	v	x	y	z
u	0	0	0	0	0
v	0	0	1	1	1
x	0	1	0	1	0
y	0	1	1	0	1
z	0	1	0	1	0

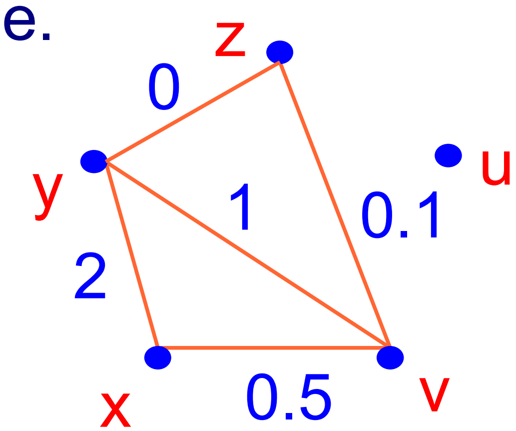
Rmq. En changeant l'ordre de lignes et colonnes, on obtient une autre matrice d'adjacence

	x	y	z	u	v
x	0	1	0	0	1
y	1	0	1	0	1
z	0	1	0	0	1
u	0	0	0	0	0
v	1	1	1	0	0

Théorie des Graphes

9. Graphes simples valués

Exemple.



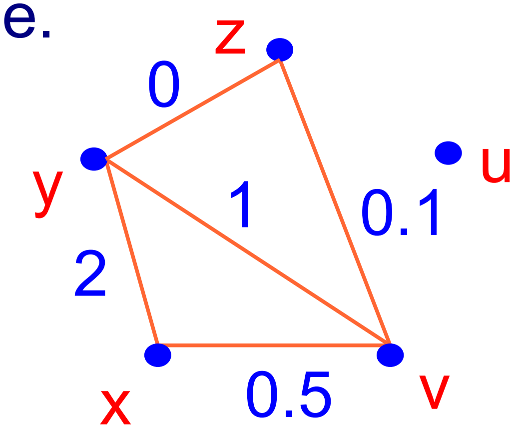
Définition. C'est un graphe simple dont chaque arête est associée à une valeur réelle, par l'application

$$v : E \rightarrow R$$

Théorie des Graphes

9. Graphes simples valués

Exemple.



ν (vx) = 0,5
ν (vy) = 1
ν (vz) = 0,1
ν (xy) = 2
ν (yz) = 0

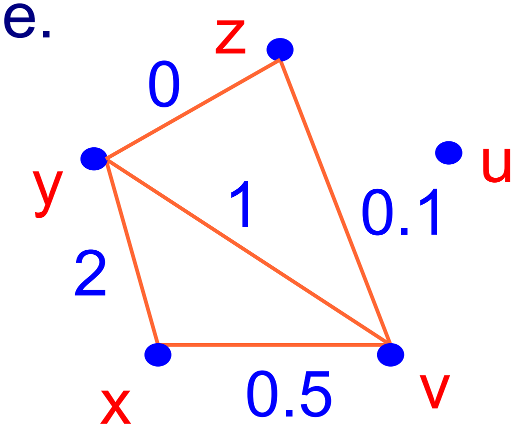
Définition. C'est un graphe simple dont chaque arête est associée à une valeur réelle, par l'application

$$\nu : E \to R$$

Théorie des Graphes

9. Graphes simples valués

Exemple.



v (vx) = 0,5
v (vy) = 1
v (vz) = 0,1
v (xy) = 2
v (yz) = 0

v (uv) = ∞
v (ux) = ∞
v (uy) = ∞
v (uz) = ∞
v (xz) = ∞

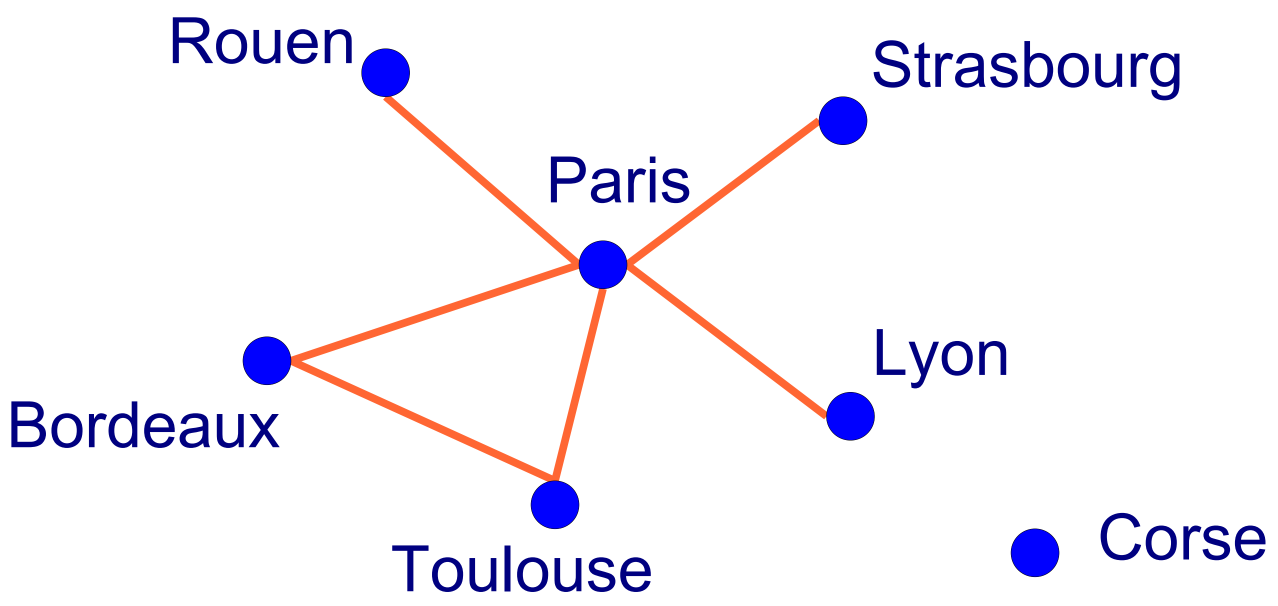
Définition. C'est un graphe simple dont chaque arête est associée à une valeur réelle, par l'application

$$v : E \to R$$

Théorie des Graphes

9. Graphes simples valués

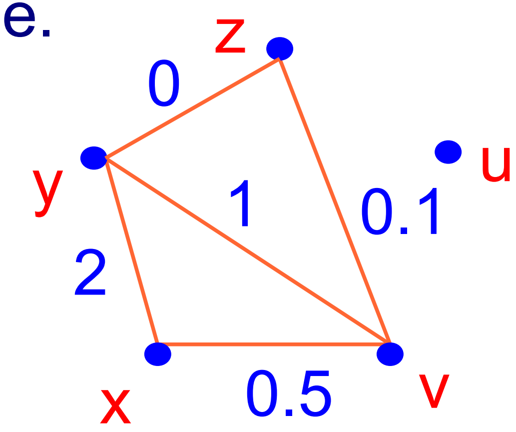
À quoi servent les graphes valués ?
Exemple. Les valeurs intéressantes: longueur, temps, coût ...



Théorie des Graphes

9. Graphes simples valués

Exemple.



	u	v	x	y	z
u					
v			0.5	1	0.1
x		0.5		2	
y		1	2		0
z		0.1		0	

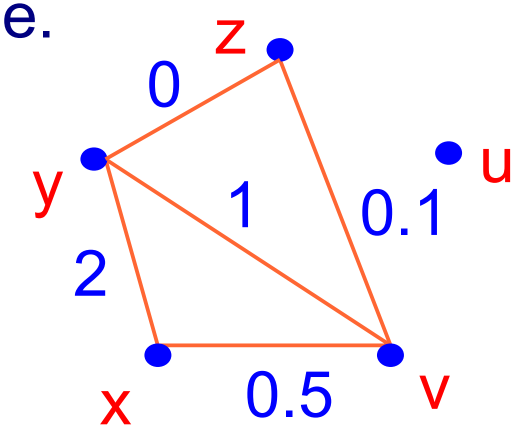
Représentation en machine. (matrice d'adjacence)

- Les lignes et colonnes sont indexés par les sommets u,v,x,y,z
- Si les sommets x,y sont reliés par une arête de valeur *v*, mettre *v* dans les cases m(x,y) et m(y,x)

Théorie des Graphes

9. Graphes simples valués

Exemple.



	u	v	x	y	z
u	∞	∞	∞	∞	∞
v	∞	∞	0.5	1	0.1
x	∞	0.5	∞	2	∞
y	∞	1	2	∞	0
z	∞	0.1	∞	0	∞

Principe. (matrice d'adjacence)

- Les lignes et colonnes sont indexés par les sommets u,v,x,y,z
- Si les sommets x,y sont reliés par une arête de valeur *v*, mettre *v* dans les cases m(x,y) et m(y,x)
- Sinon, mettre ∞ dans ces cases.