Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

4.1. Chaînes.

Une *chaîne* d'un graphe G=(X,E) est une suite de la forme:

$$(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k)$$

où $k \geq 0$

les x_i sont les sommets de G

les e_i sont les arêtes de G

tq les sommets x_i et x_{i+1} sont les extrémités de l'arête e_{i+1}

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

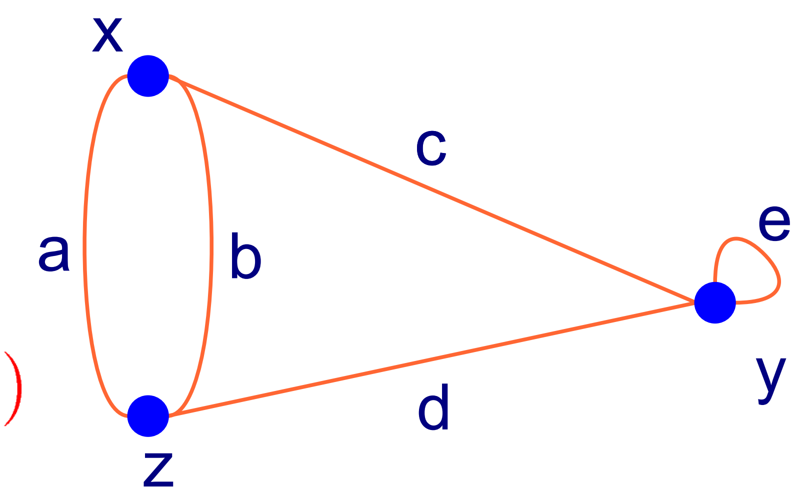
4.1. Chaînes.

Exemple. Quelques *chaînes* dans le graphe G:

$$C_1 = (x, a, z, d, y)$$

$$C_2 = (x, a, z, d, y, c, x)$$

$$C_3 = (x, a, z, b, x, c, y, e, y, d, z)$$



Graphe G = (X,E)

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

4.1. Chaînes.

Dans la chaîne $(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k)$

k désigne le nombre d'arêtes et on l'appelle la *longueur* de la chaîne

x_0 et x_k sont les extrémités de la chaîne.

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

4.1. Chaînes.

Dans la chaîne $(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k)$

k désigne le nombre d'arêtes et on l'appelle la *longueur* de la chaîne

x_0 et x_k sont les extrémités de la chaîne.

Lorsque le graphe est simple, chaque arête est représentée par ses extrémités et par conséquent, une chaîne est définie simplement par la suite de ses sommets $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

4.1. Chaînes.

Dans la chaîne $(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k)$

k désigne le nombre d'arêtes et on l'appelle la *longueur* de la chaîne

x_0 et x_k sont les extrémités de la chaîne.

Lorsque le graphe est simple, chaque arête est représentée par ses extrémités et par conséquent, une chaîne est définie simplement par la suite de ses sommets $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$

Une *sous-chaîne* d'une chaîne est une chaîne définie comme sous-suite, entre deux sommets, de la chaîne définissant la chaîne considérée.

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

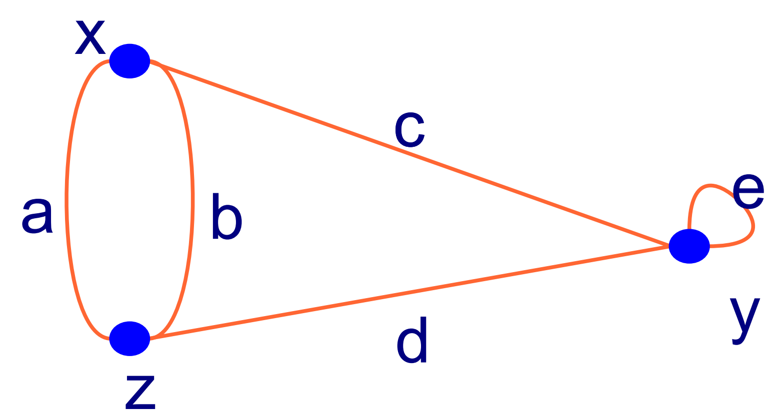
4.1. Chaînes.

Exemple. Quelques *chaînes* dans le graphe G:

$$C_1 = (x, a, z, d, y)$$

$$C_2 = (x, a, z, d, y, c, x)$$

$$C_3 = (x, a, z, b, x, c, y, e, y, d, z)$$



Graphe G = (X,E)

Les *longueurs* sont respectivement 2, 3 et 5

C_1 est une sous-chaîne de C_2

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

4.1. Chaînes.

Une chaîne est dite *simple* si ses arêtes sont deux à deux distinctes. On dit que la chaîne ne passe pas deux fois par une même arête.

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

4.1. Chaînes.

Une chaîne est dite *simple* si ses arêtes sont deux à deux distinctes. On dit que la chaîne ne passe pas deux fois par une même arête.

Une chaîne est dite *élémentaire* si ses sommets sont deux à deux distincts. On dit que la chaîne ne passe pas deux fois par un même sommet.

Rmq. *Élémentaire* entraîne *simple*.

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

4.1. Chaînes.

Une chaîne est dite *simple* si ses arêtes sont deux à deux distinctes. On dit que la chaîne ne passe pas deux fois par une même arête.

Une chaîne est dite *élémentaire* si ses sommets sont deux à deux distincts. On dit que la chaîne ne passe pas deux fois par un même sommet.

Rmq. *Élémentaire* entraîne *simple*.

Une chaîne est dite *fermée* si ses extrémités x_0 et x_k coïncident.

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

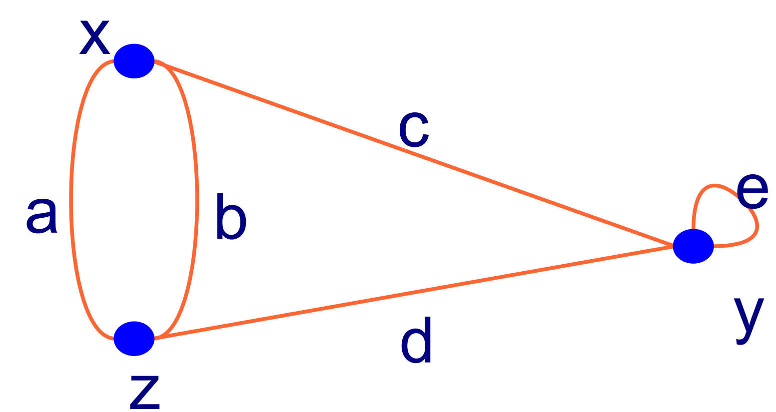
4.1. Chaînes.

Exemple. Quelques *chaînes* dans le graphe G:

$$C_1 = (x, a, z, d, y)$$

$$C_2 = (x, a, z, d, y, c, x)$$

$$C_3 = (x, a, z, b, x, c, y, e, y, d, z)$$



Graphe G = (X,E)

C_1 est simple et élémentaire
C_2 est simple, fermée
C_3 est simple mais elle n'est pas élémentaire

Théorie des Graphes

4. Chaînes et cycles.

4.1. Chaînes.

Lemme. Dans un graphe, si deux sommets sont reliés par une chaîne alors ils sont reliés par une chaîne élémentaire.

Théorie des Graphes

4.2. Cycles.

Un *cycle* est une chaîne

- de longueur plus grande ou égale à 1
- simple
- et fermée

c.à.d., une chaîne $(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_0)$
où $k \geq 1$ et les arêtes e_i sont deux à deux distinctes.

Théorie des Graphes

4.2. Cycles.

Un *cycle* est une chaîne

- de longueur plus grande ou égale à 1
- simple
- et fermée

c.à.d., une chaîne $(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_0)$
où $k \geq 1$ et les arêtes e_i sont deux à deux distinctes.

Exemple. La chaîne

$$C_2 = (x, a, z, d, y, c, x)$$

est un *cycle* de longueur 3.

Théorie des Graphes

4.2. Cycles.

L'entier k est la *longueur* du cycle.
Notons que $k>0$. Lorsque $k=1$, le cycle est constitué d'un sommet avec une boucle.

Théorie des Graphes

4.2. Cycles.

L'entier k est la *longueur* du cycle.
Notons que $k>0$. Lorsque $k=1$, le cycle est constitué d'un sommet avec une boucle.

Lorsque le graphe est simple, un cycle peut être défini par la suite $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0)$ de ses sommets.

Théorie des Graphes

4.2. Cycles.

L'entier k est la *longueur* du cycle.
Notons que k>0. Lorsque k=1, le cycle est constitué d'un sommet avec une boucle.

Lorsque le graphe est simple, un cycle peut être défini par la suite $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0)$ de ses sommets.

Un cycle est *élémentaire* si ses sommets $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sont deux à deux distincts.

Théorie des Graphes

4.2. Cycles.

L'entier k est la *longueur* du cycle.
Notons que k>0. Lorsque k=1, le cycle est constitué d'un sommet avec une boucle.

Lorsque le graphe est simple, un cycle peut être défini par la suite $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0)$ de ses sommets.

Un cycle est *élémentaire* si ses sommets $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sont deux à deux distincts.

Un cycle est dit *pair* ou *impair* suivant que sa longueur est paire ou impaire.

Théorie des Graphes

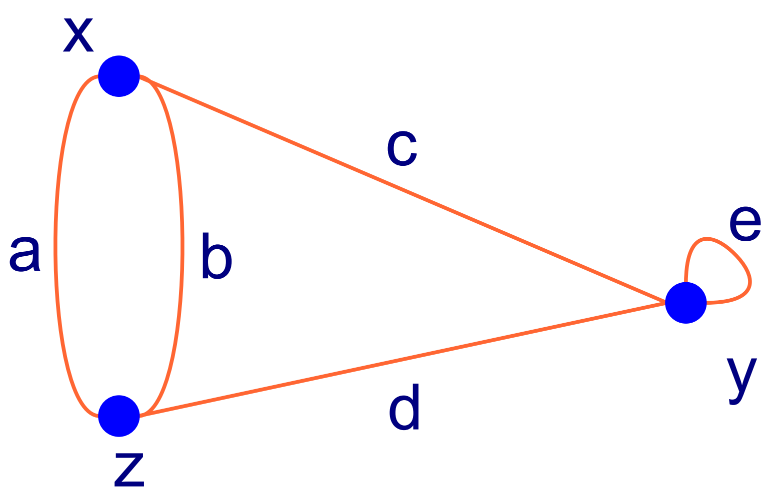
4.2. Cycles.

Exemple. La chaîne

$$C_2 = (x, a, z, d, y, c, x)$$

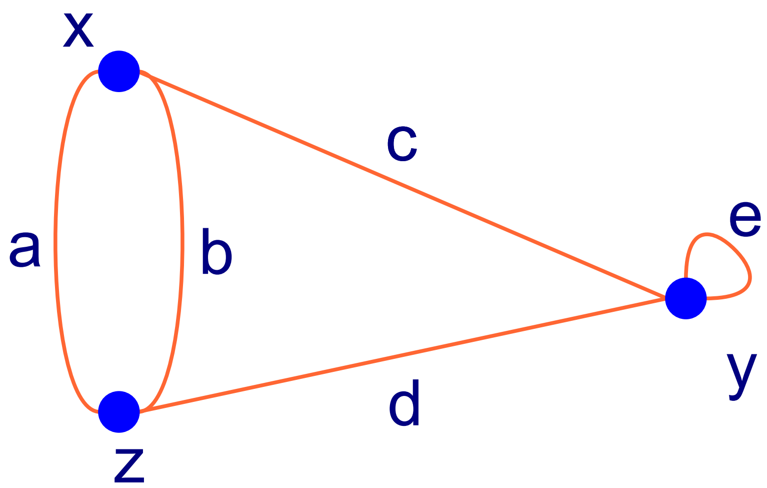
est un *cycle* de longueur 3.

Elle est *élémentaire*, *impaire*.



Théorie des Graphes

4.2. Cycles.



Exemple. La chaîne

$$C_2 = (x, a, z, d, y, c, x)$$

est un *cycle* de longueur 3.

Elle est *élémentaire*, *impaire*.

Rmq. On ne distingue pas des cycles qui ne diffèrent que par leurs paramétrages, c.à.d., par les suites qui les définissent.

Exemple. $$\begin{aligned} C_2 &= (x, a, z, d, y, c, x) \\ &= (z, d, y, c, x, a, z) \\ &= (y, c, x, a, z, d, y) \end{aligned}$$

Théorie des Graphes

4.2. Chaîne et cycles comme graphes.

Soit un graphe G = (X,E).

Par extension des définitions précédentes, on appelle G une *chaîne (élémentaire)* si

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$$

et $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$

tq $(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k)$ soit une chaîne élémentaire de G.

Théorie des Graphes

4.2. Chaîne et cycles comme graphes.

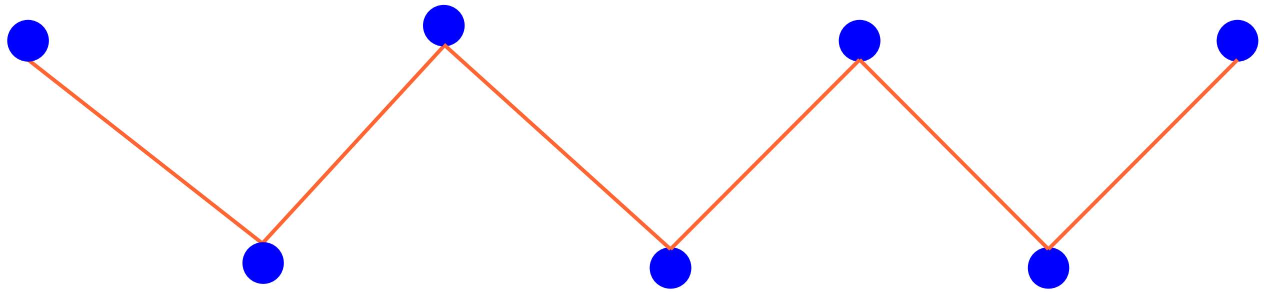
Soit un graphe G = (X,E).

Par extension des définitions précédentes, on appelle G une *chaîne (élémentaire)* si

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$$

et $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$

tq $(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k)$ soit une chaîne élémentaire de G.



Théorie des Graphes

4.2. Chaîne et cycles comme graphes.

De même, on parle d'un *cycle* si G *peut être paramétré comme un cycle élémentaire*.

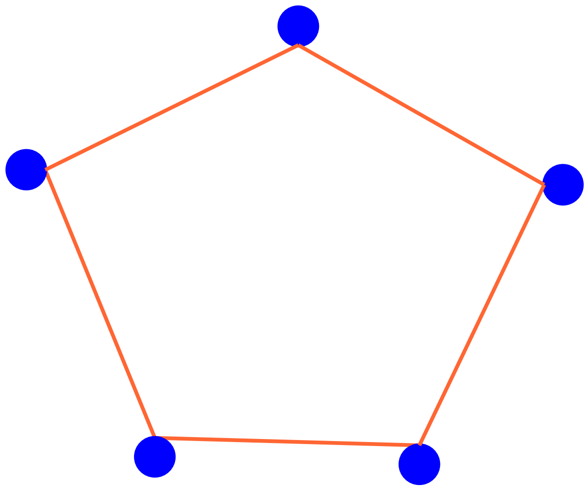
Un tel cycle est unique dès lors que sa longueur est fixée.

Théorie des Graphes

4.2. Chaîne et cycles comme graphes.

De même, on parle d'un *cycle* si G *peut être paramétré comme un cycle élémentaire*.

Un tel cycle est unique dès lors que sa longueur est fixée.
C'est ainsi par exemple qu'on parle du *cycle de longueur 5*.



Théorie des Graphes

5. Degré.

On appelle *degré* d'un sommet x d'un graphe G le nombre d'arêtes de G incidentes à x, c.à.d., admettant x comme extrémité.

Précisons que chaque boucle compte deux fois.

On note $d(x)$ ou $d_G(x)$ cet entier.

Théorie des Graphes

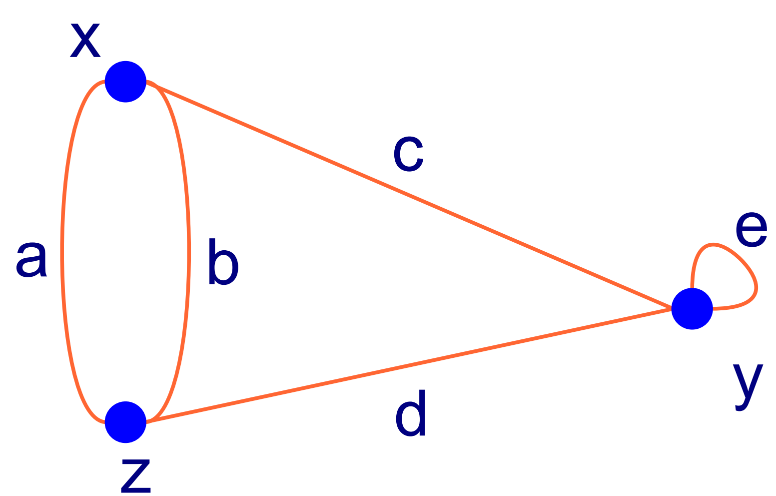
5. Degré.

On appelle *degré* d'un sommet x d'un graphe G le nombre d'arêtes de G incidentes à x, c.à.d., admettant x comme extrémité.

Précisons que chaque boucle compte deux fois.

On note $d(x)$ ou $d_G(x)$ cet entier.

Exemple.



Théorie des Graphes

5. Degré.

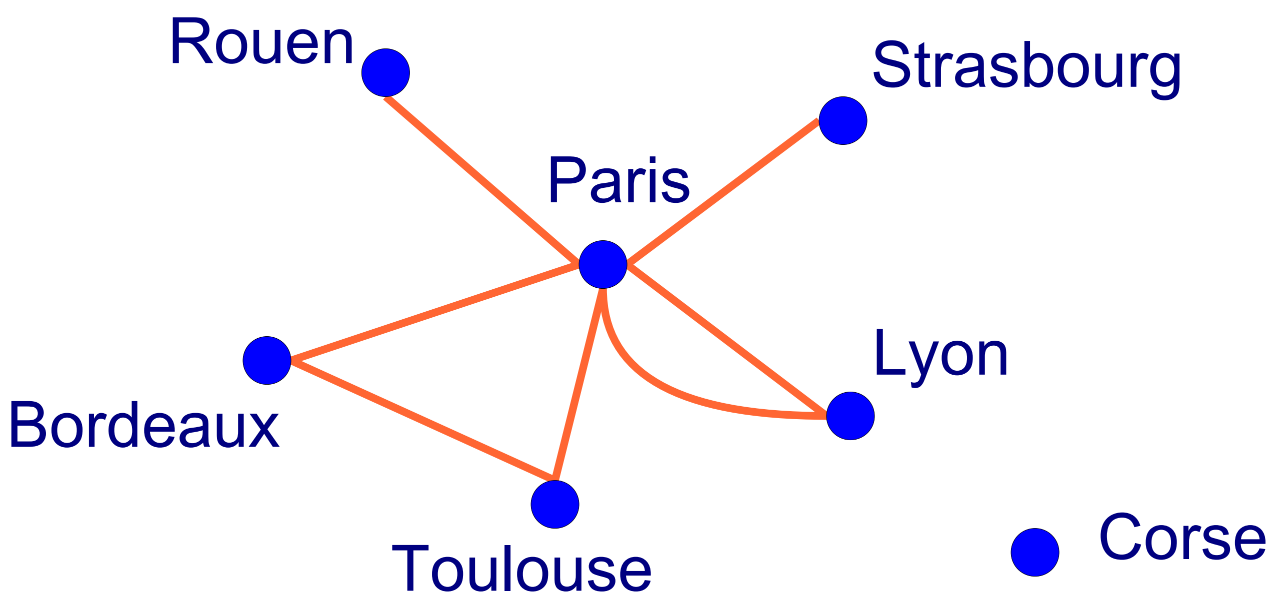
Un sommet est dit *isolé* si *son degré est nul*.

Théorie des Graphes

5. Degré.

Un sommet est dit *isolé* si *son degré est nul*.

Exemple. Corse est isolé (au point de vue ferré)



Théorie des Graphes

5. Degré.

Proposition. Dans un graphe quelconque $G=(X,E)$, on a

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = 2m.$$

Théorie des Graphes

5. Degré.

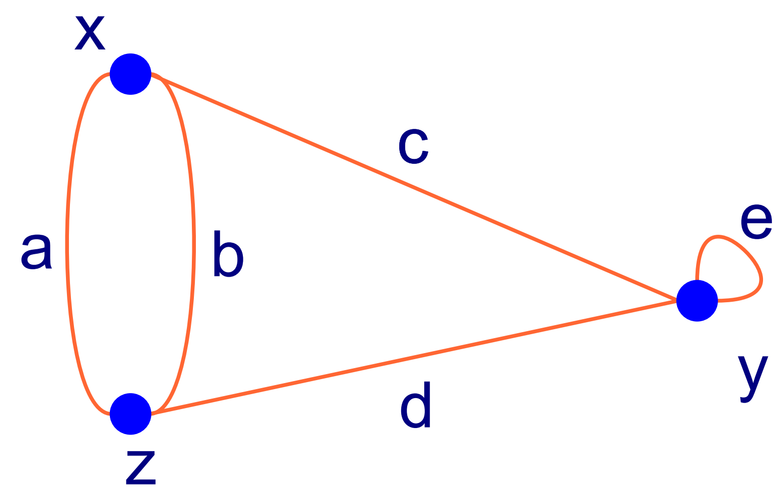
Proposition. Dans un graphe quelconque G=(X,E), on a

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = 2m.$$

Exemple.

$$d(x) = 3$$
$$d(y) = 4 \qquad m = 5$$
$$d(z) = 3$$

$$\boxed{d(x) + d(y) + d(z) = 2m}$$



Théorie des Graphes

5. Degré.

Proposition. Dans un graphe quelconque G=(X,E), on a

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = 2m.$$

Corollaire. Dans un graphe quelconque,

- la somme des degrés est paire
- le nombre de sommets de degré impair est pair

Théorie des Graphes

5. Degré.

Exercice. Considérons un groupe de 5 amis qui s'embrassent pour se dire bonjour. Est-il possible que chacun d'entre eux embrasse exactement 3 de ses amis ?

Théorie des Graphes

5. Degré.

On appelle

- *degré minimum* d'un graphe G le minimum des degrés, notée δ_G ou δ
- *degré maximum* de G le maximum des degrés, notée Δ_G ou Δ

Théorie des Graphes

5. Degré.

On appelle

- *degré minimum* d'un graphe G le minimum des degrés, notée δ_G ou δ
- *degré maximum* de G le maximum des degrés, notée Δ_G ou Δ

Rmq. Il résulte de la proposition précédente les inégalités:

$$\boxed{n\delta \leq 2m \leq n\Delta}$$

Théorie des Graphes

5. Degré.

Graphes réguliers

Un graphe G est dit *régulier* si *les degrés de ses sommets sont tous égaux*.

On peut préciser le degré commun k des sommets en disant *k-régulier*.
En particulier, les graphes *3-réguliers* sont dits *cubiques*.

Théorie des Graphes

5. Degré.

Graphes réguliers

Un graphe G est dit *régulier* si *les degrés de ses sommets sont tous égaux*.

On peut préciser le degré commun k des sommets en disant *k-régulier*.
En particulier, les graphes *3-réguliers* sont dits *cubiques*.

Rmq. Pour un graphe G *k-régulier*, on a

$$\boxed{nk = 2m}$$

Théorie des Graphes

6. Connexité.

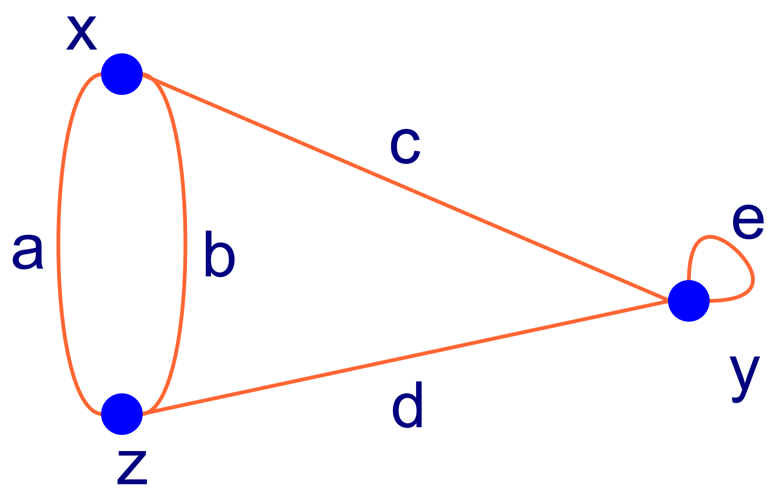
Un graphe G est dit *connexe* si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Théorie des Graphes

6. Connexité.

Un graphe G est dit *connexe* si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Exemple. Un graphe *connexe*

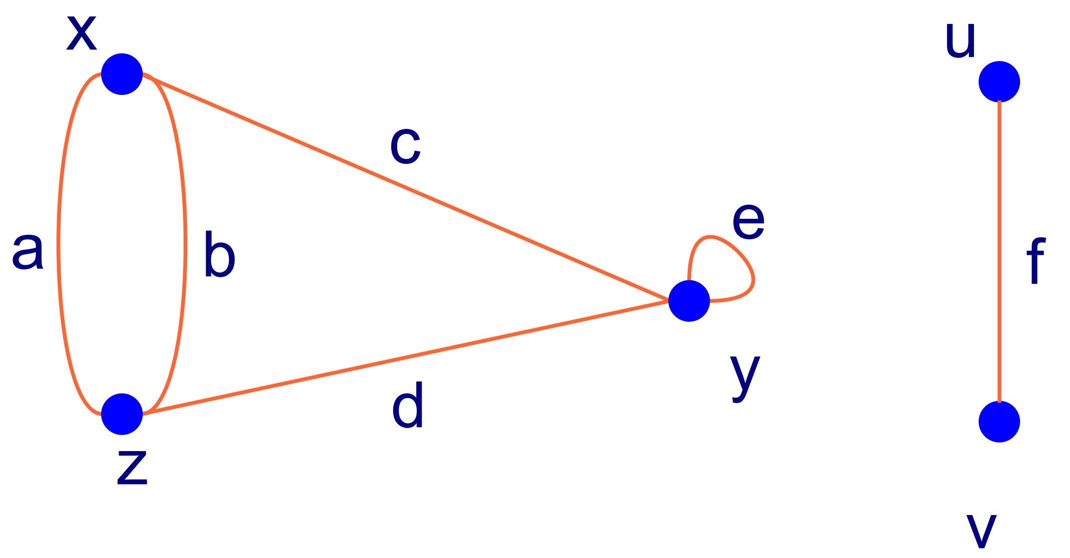


Théorie des Graphes

6. Connexité.

Un graphe G est dit *connexe* si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Exemple. Un graphe *non connexe*



Théorie des Graphes

6. Connexité.

Les *composantes connexes* d'un graphe G sont les *sous-graphes engendrés connexes maximaux* de G.

Théorie des Graphes

6. Connexité.

Les *composantes connexes* d'un graphe G sont les *sous-graphes engendrés connexes maximaux* de G.

Maximal veut dire ici que le sous-graphe en question n'est pas lui-même sous-graphe *propre*, c.à.d., ayant strictement moins de sommets, d'un sous-graphe connexe de G.

6. Connexité.

Les *composantes connexes* d'un graphe G sont les *sous-graphes engendrés connexes maximaux* de G.

Maximal veut dire ici que le sous-graphe en question n'est pas lui-même sous-graphe *propre*, c.à.d., ayant strictement moins de sommets, d'un sous-graphe connexe de G.

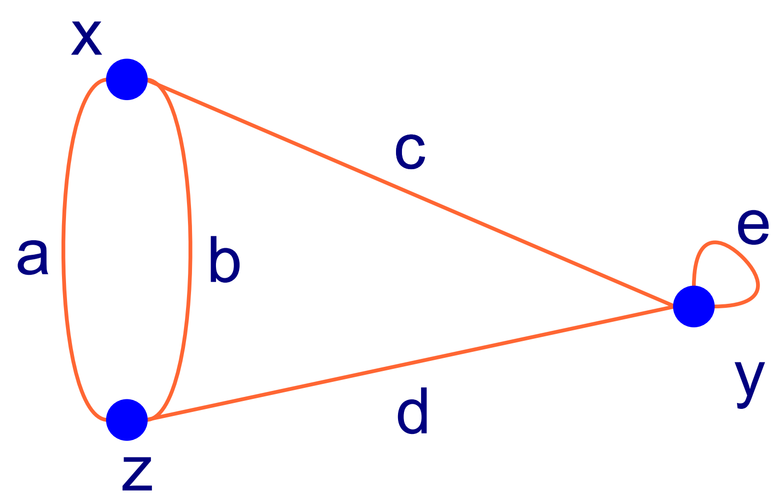
Rappel. Pour chaque *sous-ensemble de sommets X',* le *sous-graphe engendré par X'* est G'=(X',E') t.q.
E' est l'ensemble des arêtes de E qui ont leurs extrémités dans X'

Théorie des Graphes

6. Connexité.

Les *composantes connexes* d'un graphe G sont les *sous-graphes engendrés connexes maximaux* de G.

Exemple.

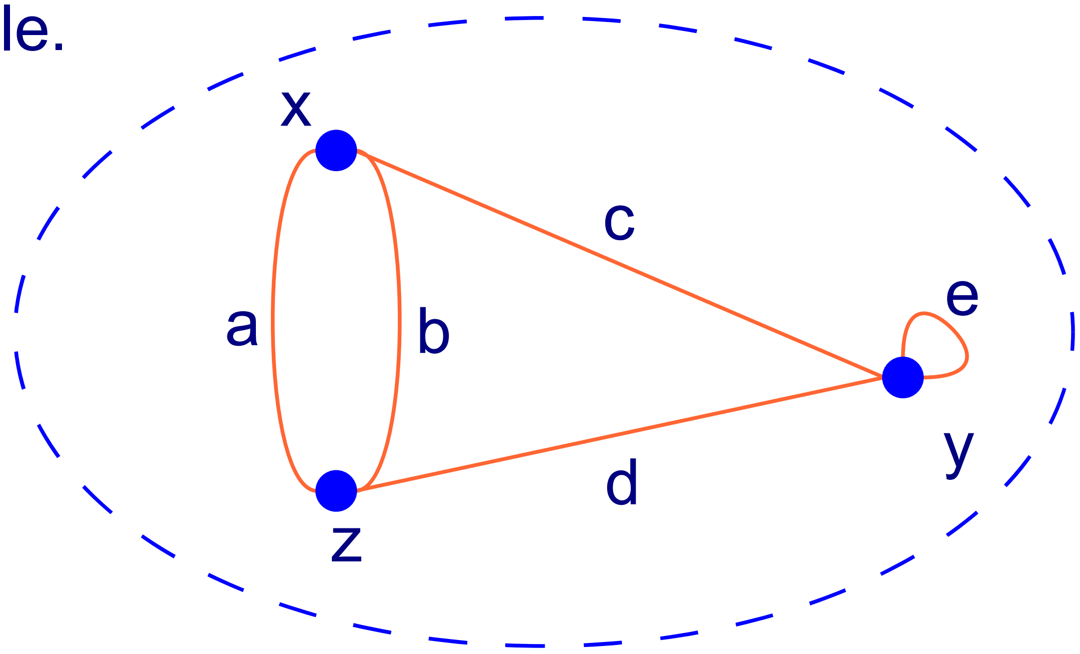


Théorie des Graphes

6. Connexité.

Les *composantes connexes* d'un graphe G sont les *sous-graphes engendrés connexes maximaux* de G.

Exemple.

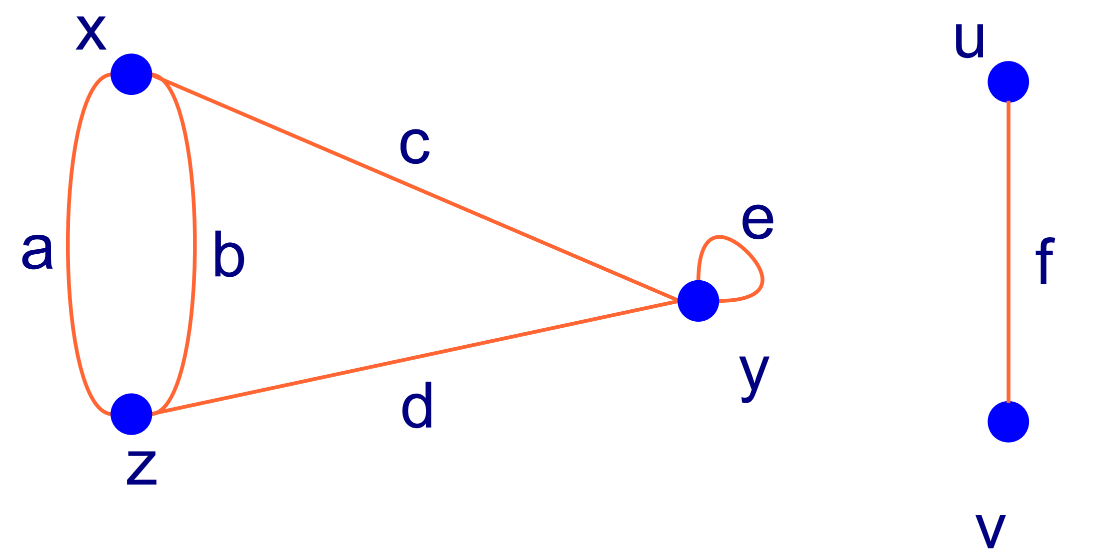


Théorie des Graphes

6. Connexité.

Les *composantes connexes* d'un graphe G sont les *sous-graphes engendrés connexes maximaux* de G.

Exemple.

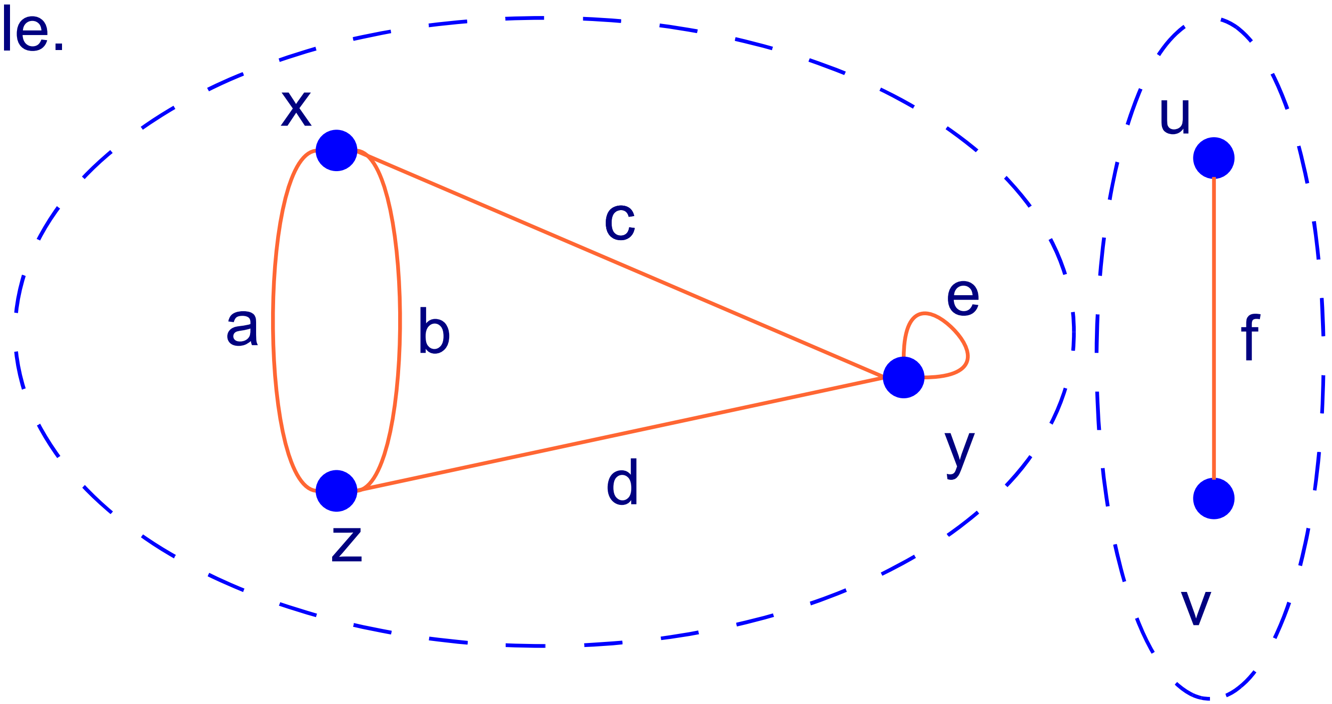


Théorie des Graphes

6. Connexité.

Les *composantes connexes* d'un graphe G sont les *sous-graphes engendrés connexes maximaux* de G.

Exemple.



Théorie des Graphes

6. Connexité.

Propriétés.

Un graphe est connexe si et seulement s'il n'a qu'une seule composante connexe.

Théorie des Graphes

6. Connexité.

Propriétés.

Un graphe est connexe si et seulement s'il n'a qu'une seule composante connexe.

Les composantes connexes d'un graphe sont des sous-graphes deux à deux disjoints, c.à.d., n'ayant deux à deux ni de sommets ni d'arêtes en commun.

Théorie des Graphes

6. Connexité.

Propriétés.

Un graphe est connexe si et seulement s'il n'a qu'une seule composante connexe.

Les composantes connexes d'un graphe sont des sous-graphes deux à deux disjoints, c.à.d., n'ayant deux à deux ni de sommets ni d'arêtes en commun.

Si un graphe possède un graphe partiel connexe, il est lui-même connexe.
(*Rappel.* Un sous-graphe est partiel si il contient tous les sommets du graphe original.)

Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Un graphe $G=(X,E)$ est *biparti* si

X peut être divisé en deux parties X_1 et X_2, appelées *classes :*

disjointes: $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

recouvrant l'ensemble: $X_1 \cup X_2 = X$

et toute arête a une extrémité dans chaque classe.

Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Un graphe $G=(X,E)$ est *biparti* si

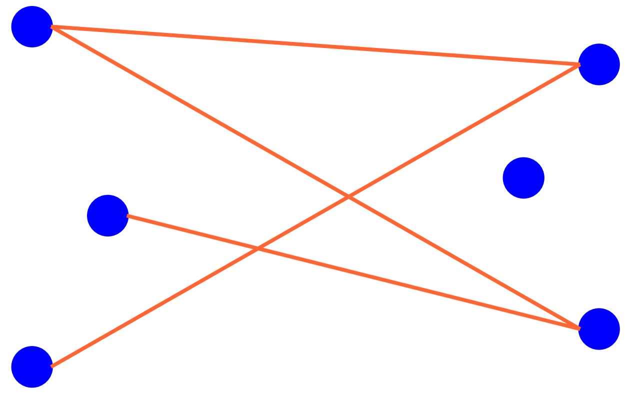
X peut être divisé en deux parties X_1 et X_2, appelées *classes :*

disjointes: $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

recouvrant l'ensemble: $X_1 \cup X_2 = X$

et toute arête a une extrémité dans chaque classe.

Exemple.



Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Un graphe $G=(X,E)$ est *biparti* si

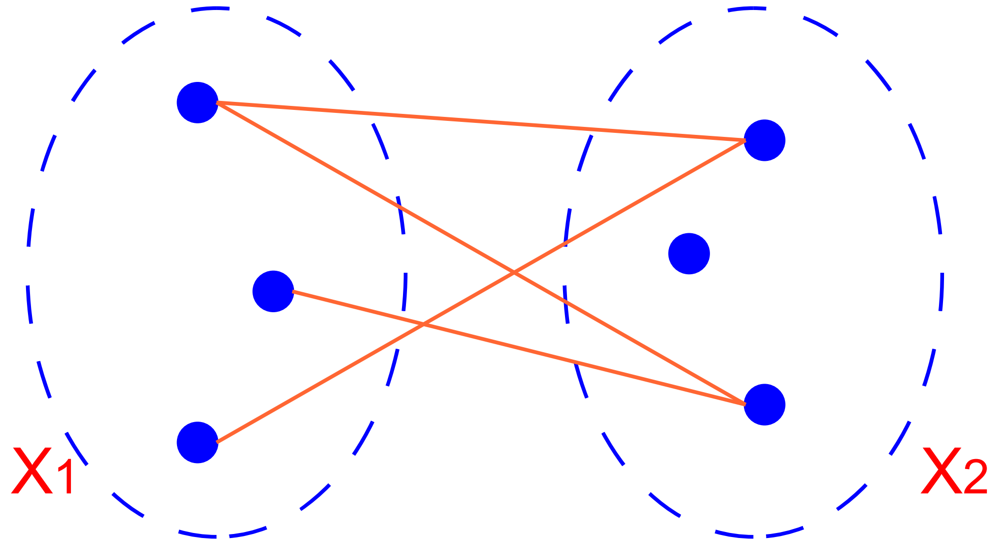
X peut être divisé en deux parties X_1 et X_2, appelées *classes :*

disjointes: $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

recouvrant l'ensemble: $X_1 \cup X_2 = X$

et toute arête a une extrémité dans chaque classe.

Exemple.



Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

On note un graphe biparti $G=(X,Y,E)$ où X et Y sont les deux classes et E est l'ensemble des arêtes.
(Par conséquent, $X \cup Y$ est l'ensemble de sommets)

Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

On note un graphe biparti $G=(X,Y,E)$ où X et Y sont les deux classes et E est l'ensemble des arêtes.
(Par conséquent, $X \cup Y$ est l'ensemble de sommets)

Rmq.

L'un des ensembles X et Y peuvent être vide.

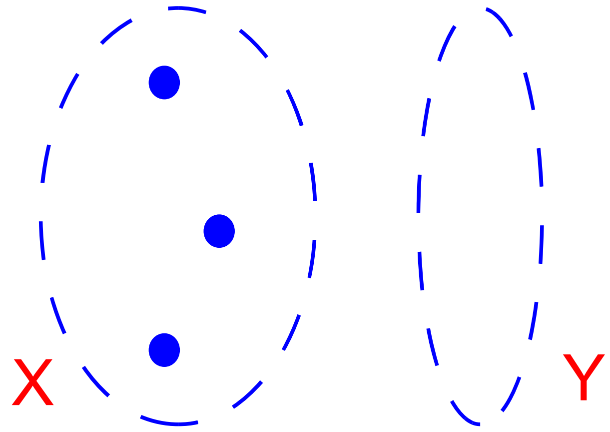
Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

On note un graphe biparti $G=(X,Y,E)$ où X et Y sont les deux classes et E est l'ensemble des arêtes.
(Par conséquent, $X \cup Y$ est l'ensemble de sommets)

Rmq.

L'un des ensembles X et Y peuvent être vide.
Dans ce cas, le graphe n'a pas d'arête.



Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

On note un graphe biparti G=(X,Y,E) où X et Y sont les deux classes et E est l'ensemble des arêtes.
(Par conséquent, X ∪ Y est l'ensemble de sommets)

Rmq.

L'un des ensembles X et Y peuvent être vide.
Dans ce cas, le graphe n'a pas d'arête.

Une bipartition qui définit un graphe comme biparti n'est pas unique en général.

Théorie des Graphes

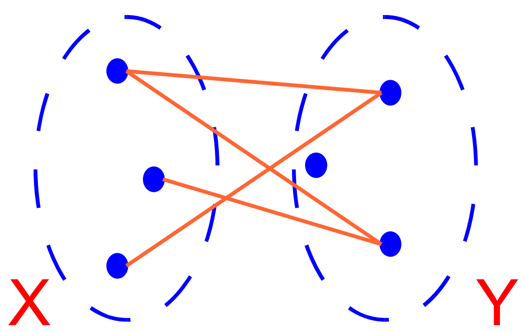
7. Graphes bipartis.

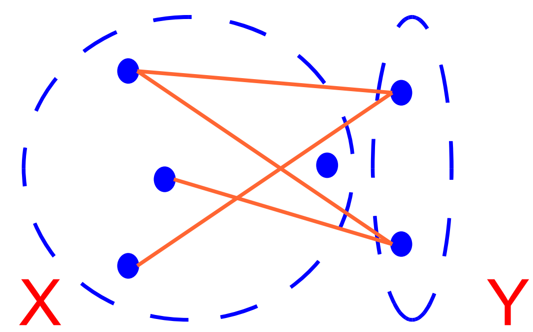
On note un graphe biparti G=(X,Y,E) où X et Y sont les deux classes et E est l'ensemble des arêtes.
(Par conséquent, X ∪ Y est l'ensemble de sommets)

Rmq.

L'un des ensembles X et Y peuvent être vide.
Dans ce cas, le graphe n'a pas d'arête.

Une bipartition qui définit un graphe comme biparti n'est pas unique en général.





7. Graphes bipartis.

On note un graphe biparti $G=(X,Y,E)$ où X et Y sont les deux classes et E est l'ensemble des arêtes.
(Par conséquent, $X \cup Y$ est l'ensemble de sommets)

Rmq.

L'un des ensembles X et Y peuvent être vide.
Dans ce cas, le graphe n'a pas d'arête.

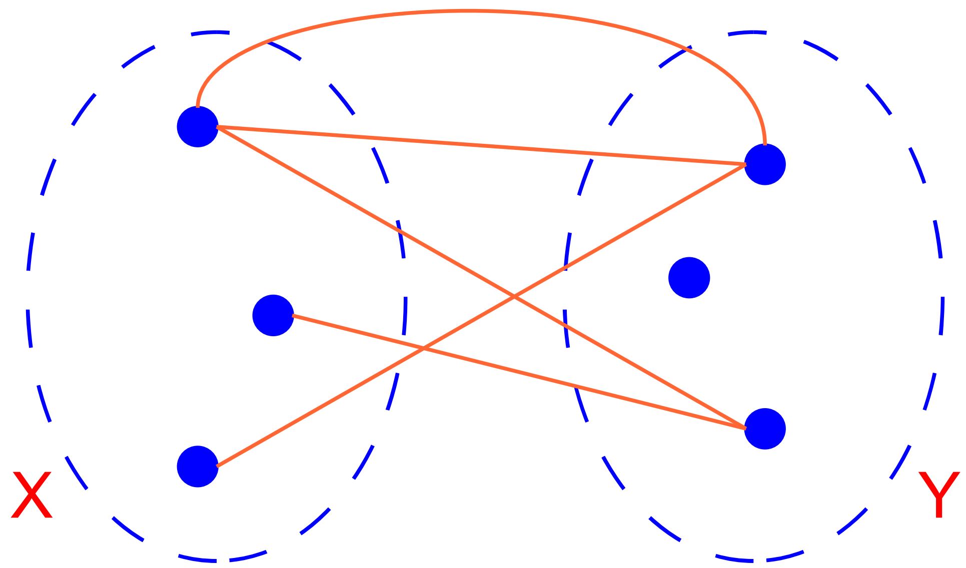
Une bipartition qui définit un graphe comme biparti n'est pas unique en général.

Un graphe biparti n'a pas de boucle.
Par contre, un graphe biparti peut avoir des arêtes multiples.

Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Exemple.



Théorie des Graphes

7. Graphes bipartis.

Un graphe biparti G=(X,Y,E) est *complet* si

toute paire d'un sommet de X et d'un sommet de Y est une arête

c.à.d., $E = \{xy | x \in X, y \in Y\}$

Théorie des Graphes

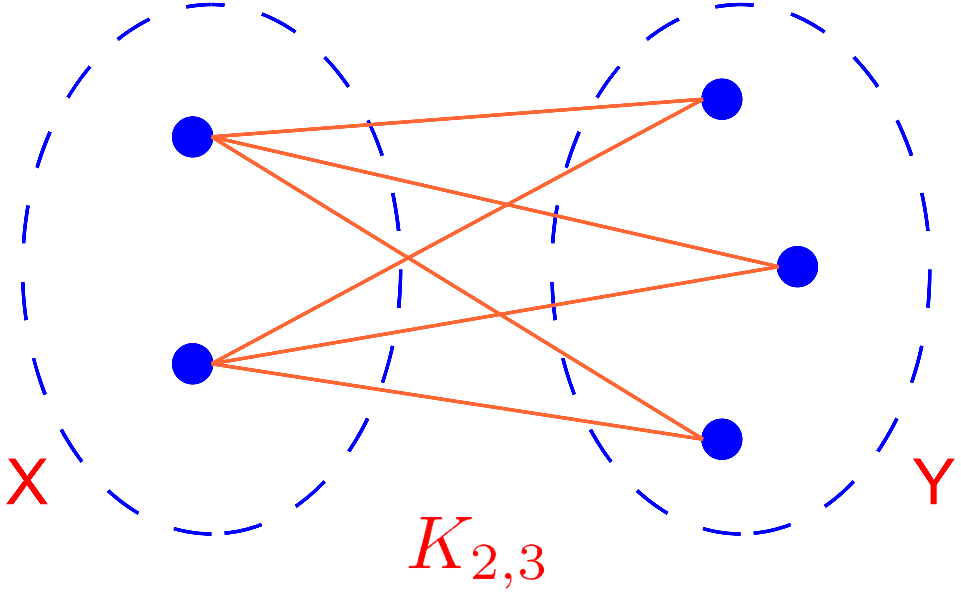
7. Graphes bipartis.

Un graphe biparti G=(X,Y,E) est *complet* si

toute paire d'un sommet de X et d'un sommet de Y est une arête

c.à.d., $E = \{xy | x \in X, y \in Y\}$

Exemple.



Théorie des Graphes

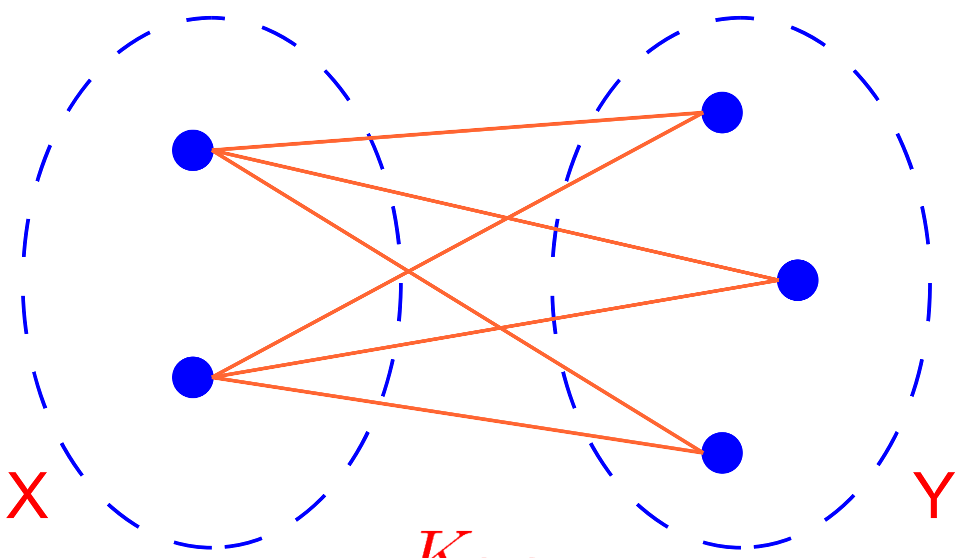
7. Graphes bipartis.

Un graphe biparti G=(X,Y,E) est *complet* si

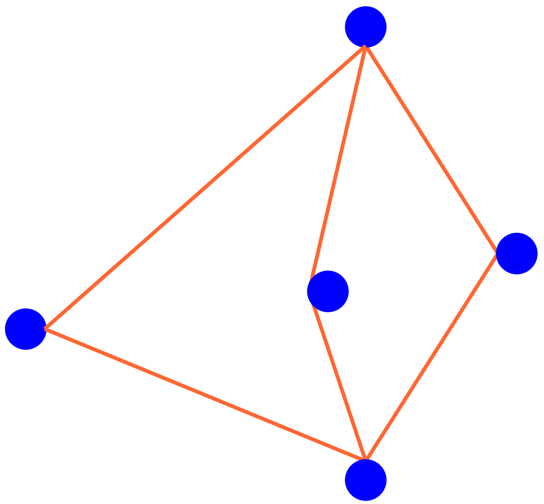
toute paire d'un sommet de X et d'un sommet de Y est une arête

c.à.d., $E = \{xy | x \in X, y \in Y\}$

Exemple.



$K_{2,3}$



représentation planaire