Mathématiques discrètes pour l'informatique

Minh-Anh Tran
minh-anh.tran@u-pec.fr

Structures et généralités

I. Graphes

II. Nombres, suites et fonctions génératrices

Structures et généralités

I. Graphes

II. Nombres, suites et fonctions génératrices

Notation:

Contrôle continu sur les graphes:

33% , vers mi-mars

Examen :

67% , vers mi-mai

Théorie des Graphes

Contenu:

- Définitions et propriétés de base
- Graphes *orientés*

4 cours de 3h + 6 TD de 3h

Théorie des Graphes

Contenu:

- Définitions et propriétés de base
- Graphes *orientés*

4 cours de 3h + 6 TD de 3h

Références:

Livre “Théorie des graphes et applications”

Jean-Claude Fournier

Supports du cours

http://www.lacl.fr/~matran/maths/

Théorie des Graphes

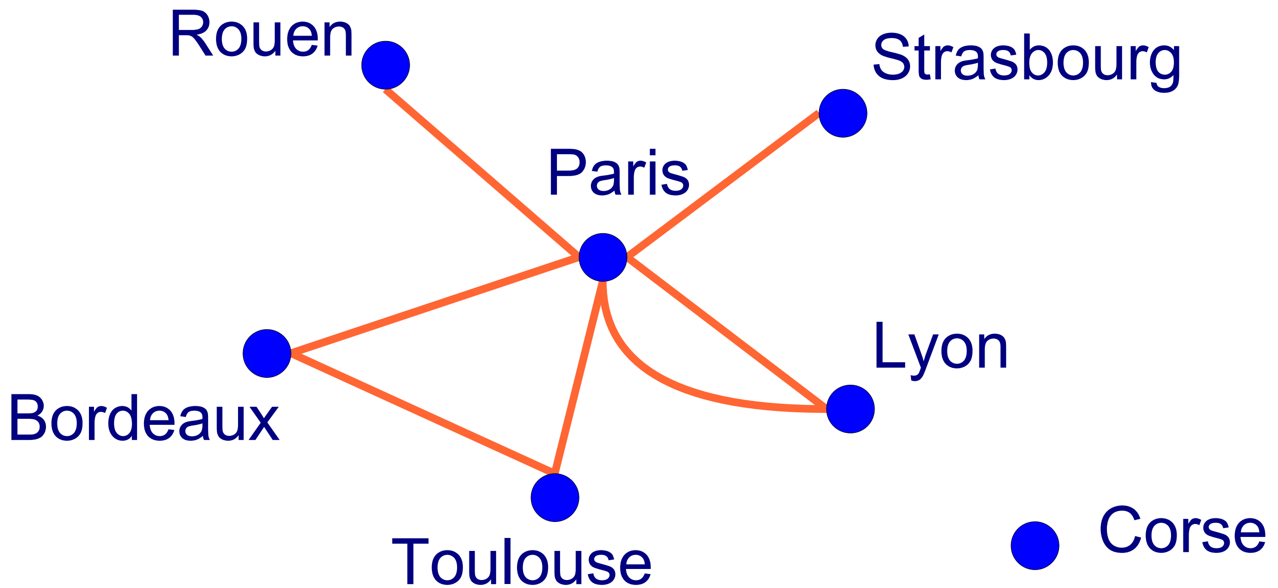
1. Notion de graphes:

- Points
- Lignes reliant certains points

Théorie des Graphes

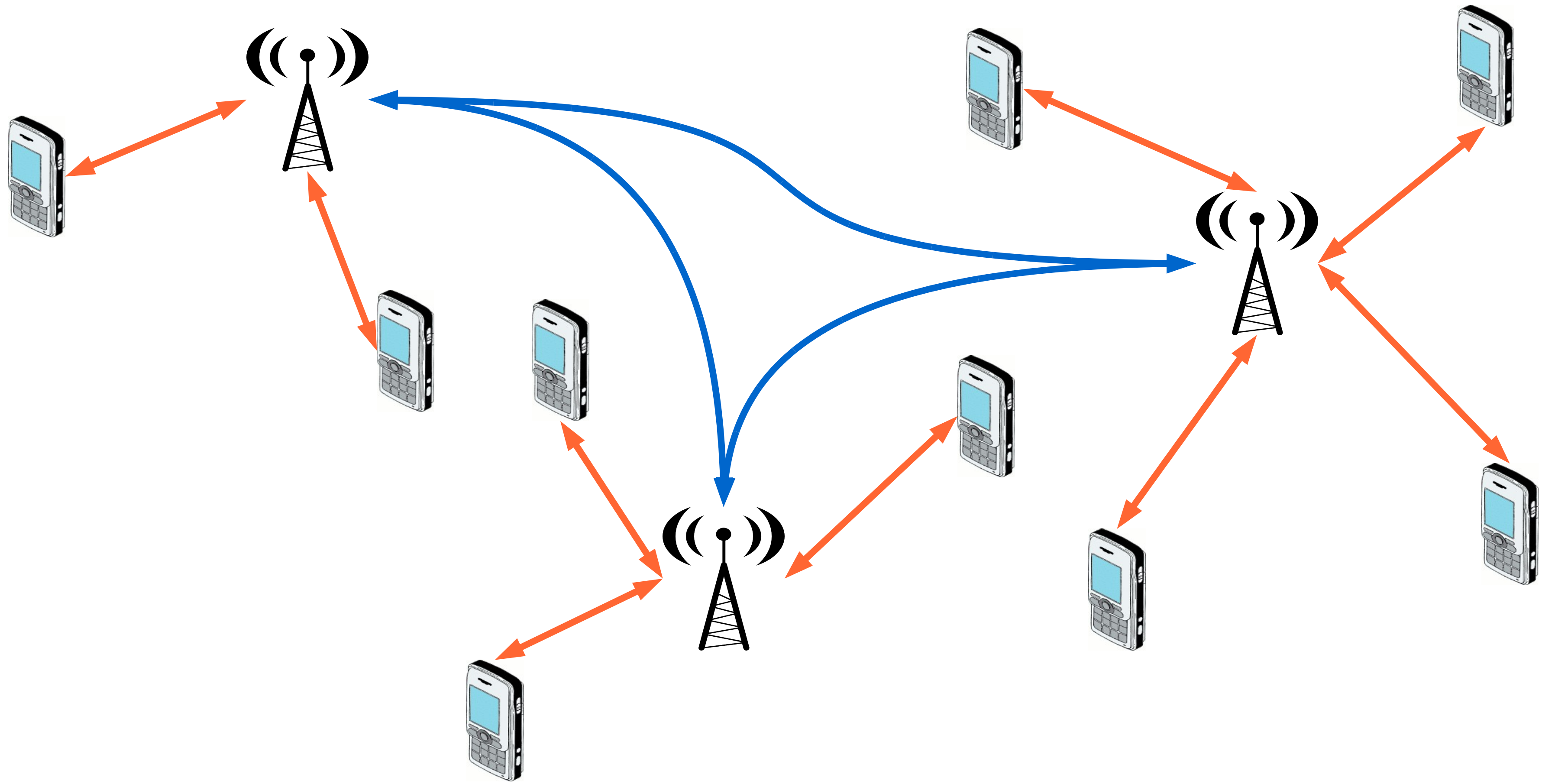
1. Notion de graphes:

- Points
- Lignes reliant certains points



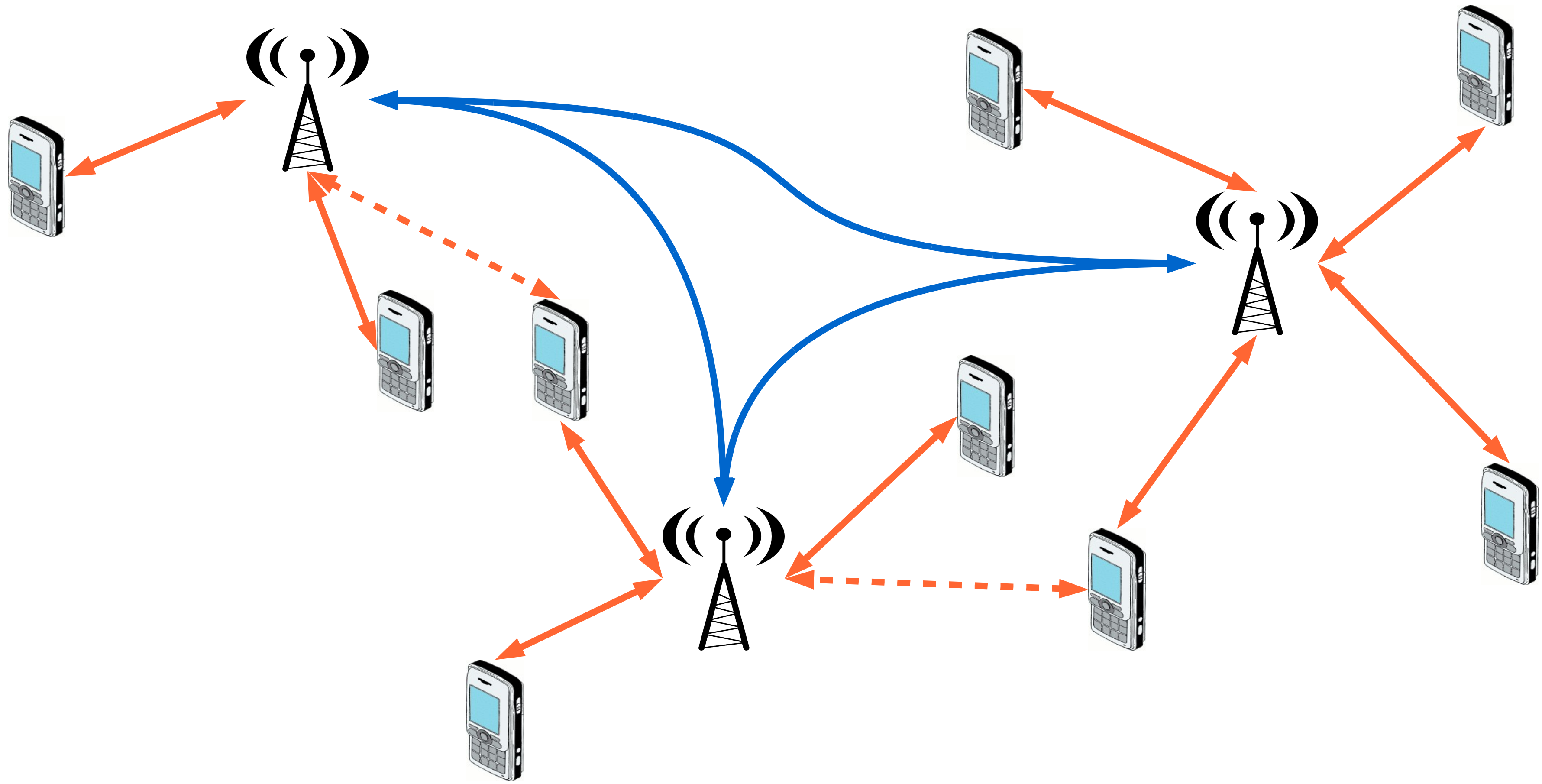
Théorie des Graphes

Exemples. Réseaux de mobiles



Théorie des Graphes

Exemples. Réseaux de mobiles



Théorie des Graphes

<u>Exemples.</u> Passeur, Loup, Chèvre et chou

Un Passeur doit faire traverser une rivière à un Loup, une Chèvre et un chou.

- Il ne peut prendre qu'un seul des trois à chaque traversée
- Il ne peut pas laisser seuls sur une rive, sans sa surveillance:
  - le Loup et la Chèvre,
  - ni la Chèvre et le chou (mauvaises situations).

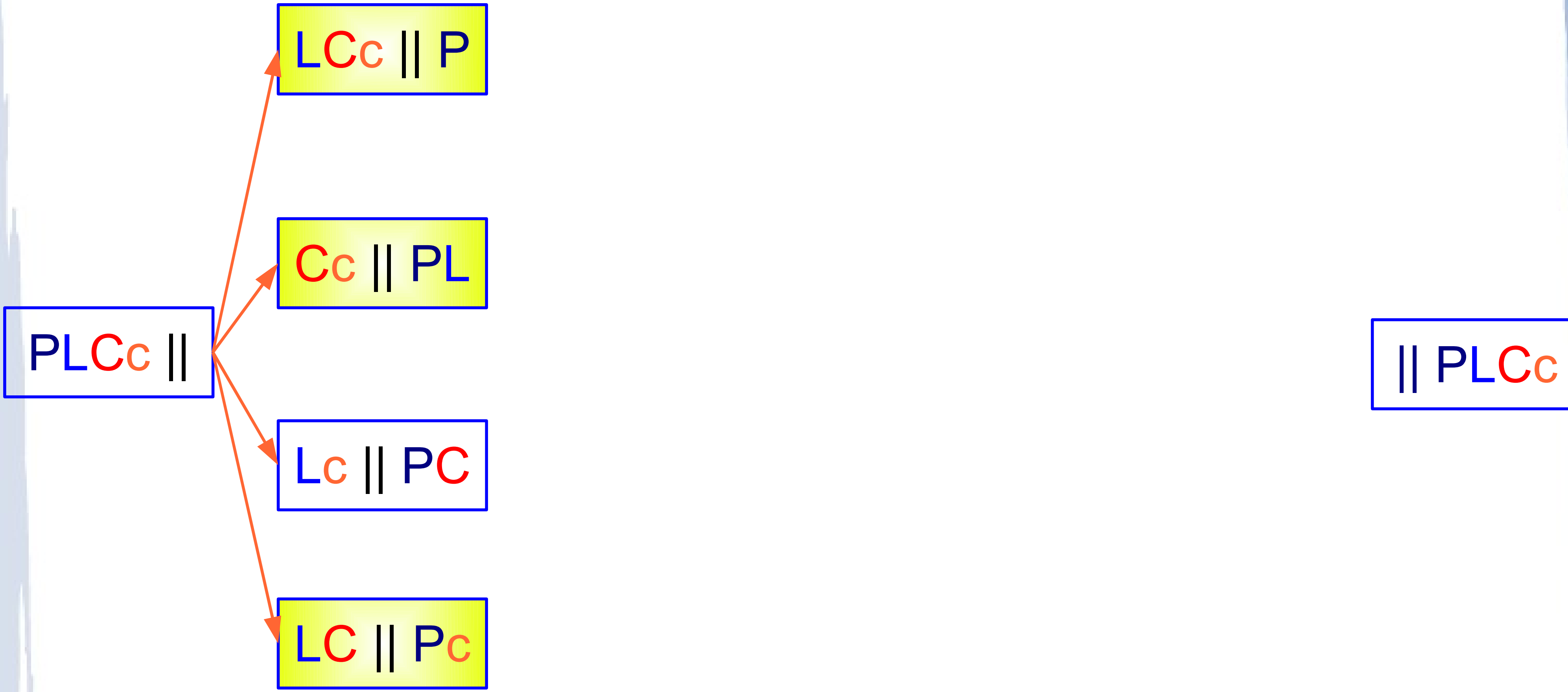
Comment doit-il procéder pour faire traverser tous les trois?
Quelle est la solution la plus rapide?

Théorie des Graphes

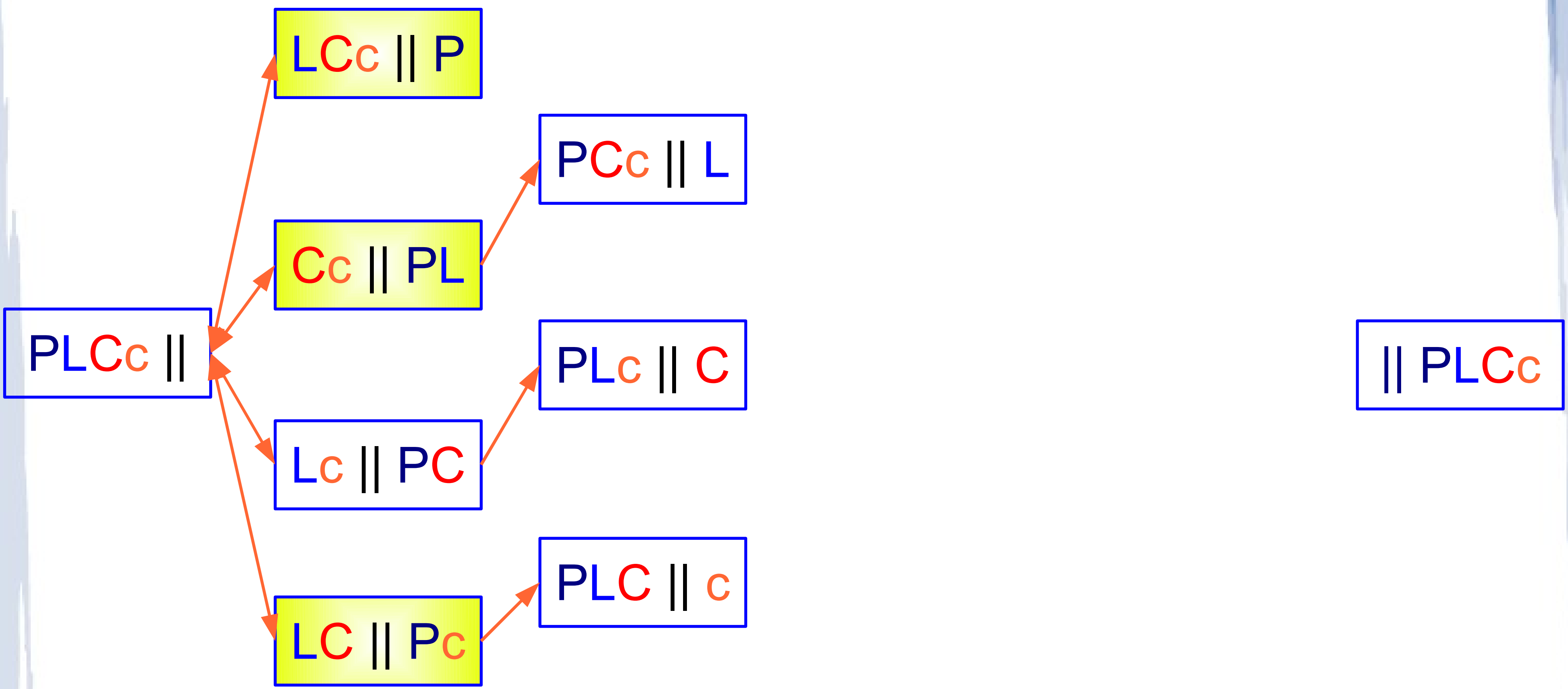
PLCc ||

|| PLCc

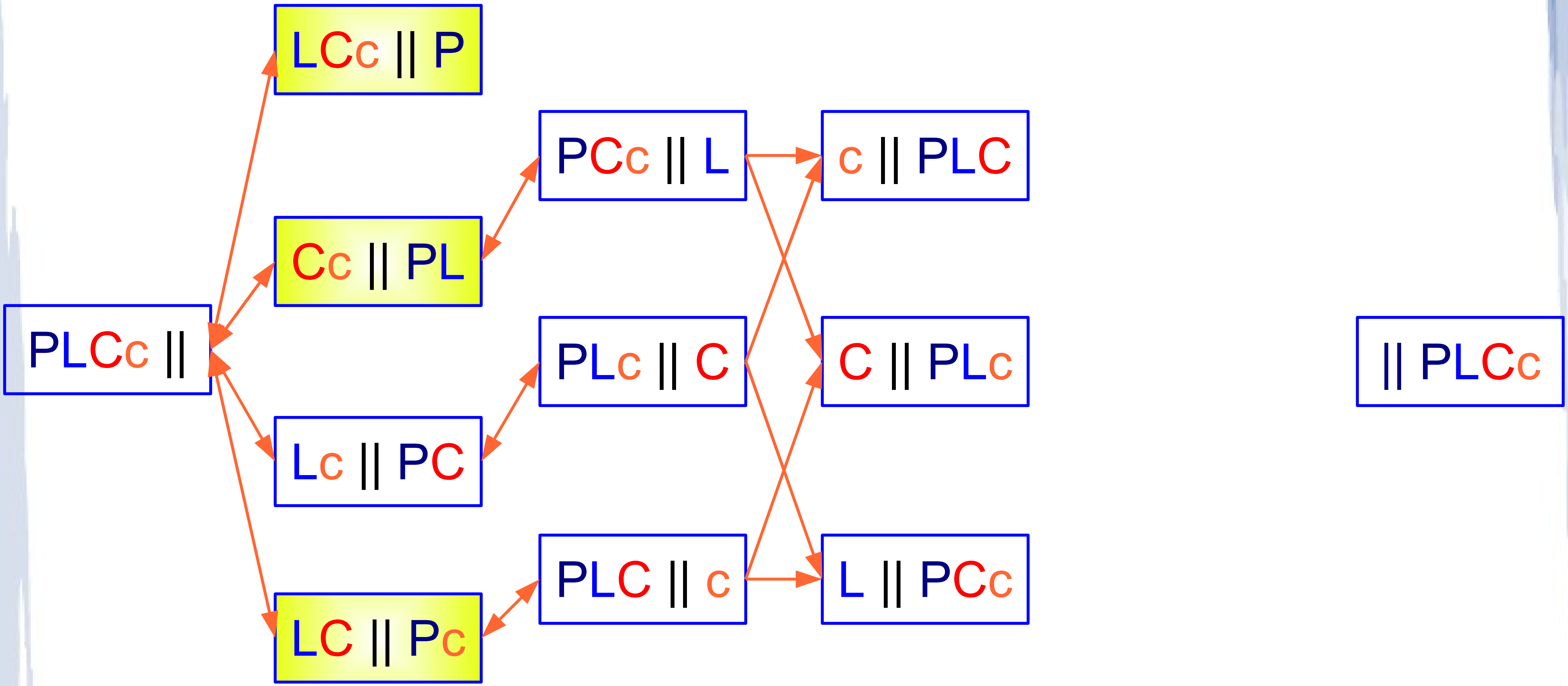
Théorie des Graphes



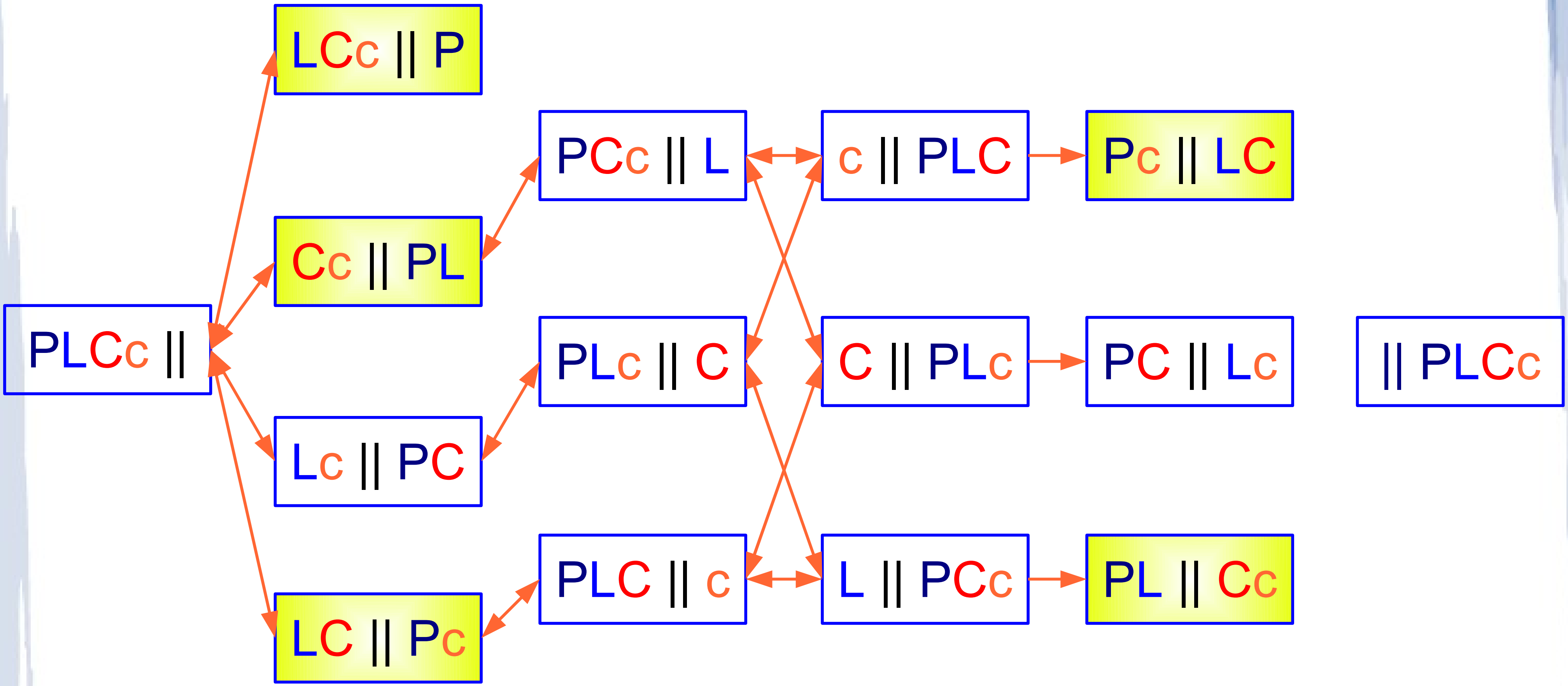
Théorie des Graphes



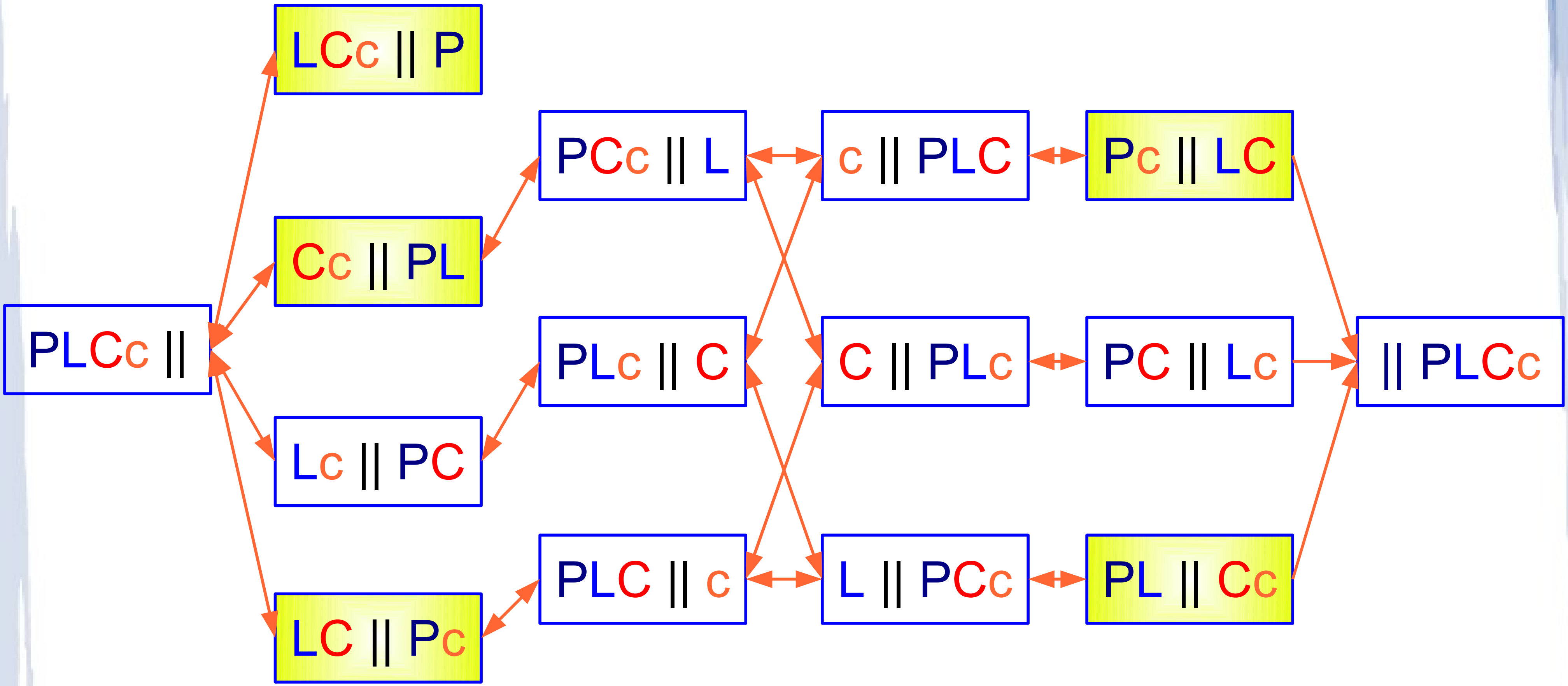
Théorie des Graphes



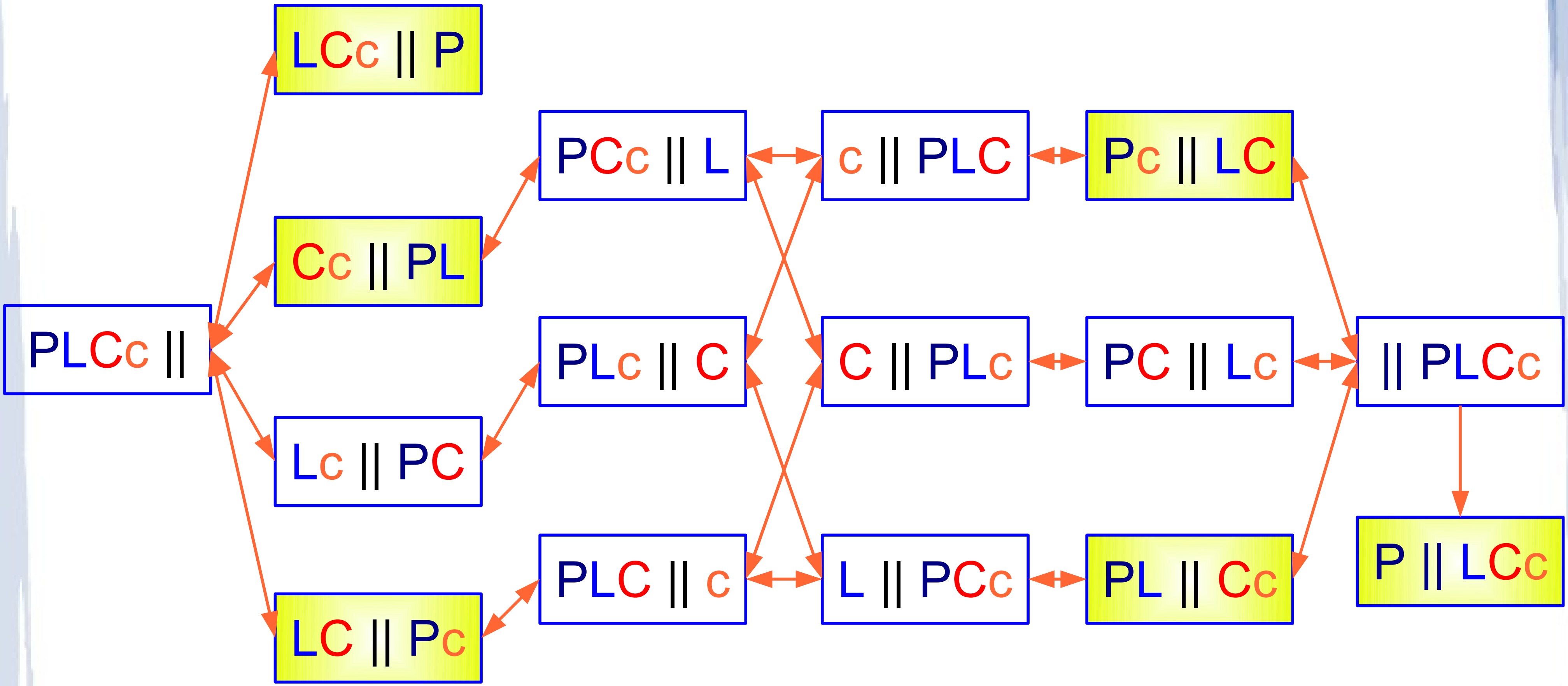
Théorie des Graphes



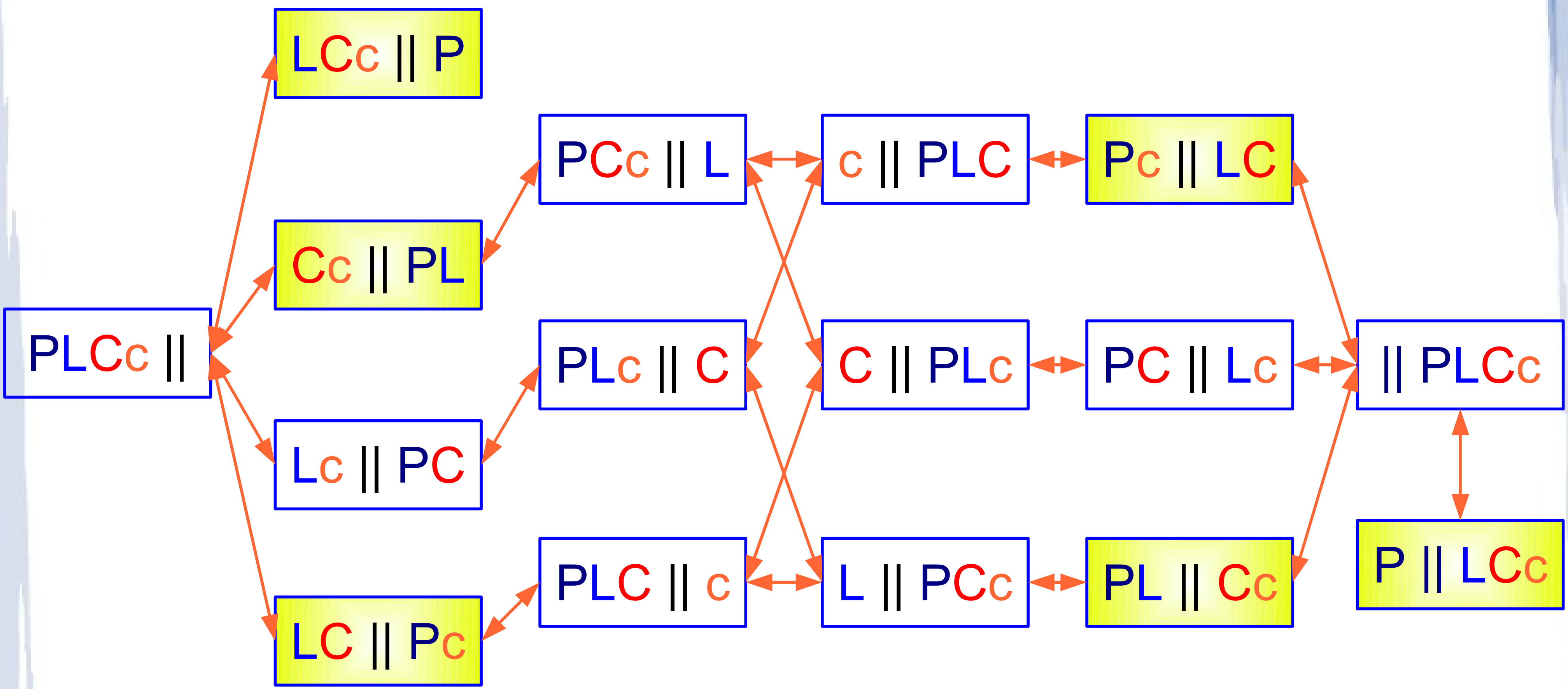
Théorie des Graphes



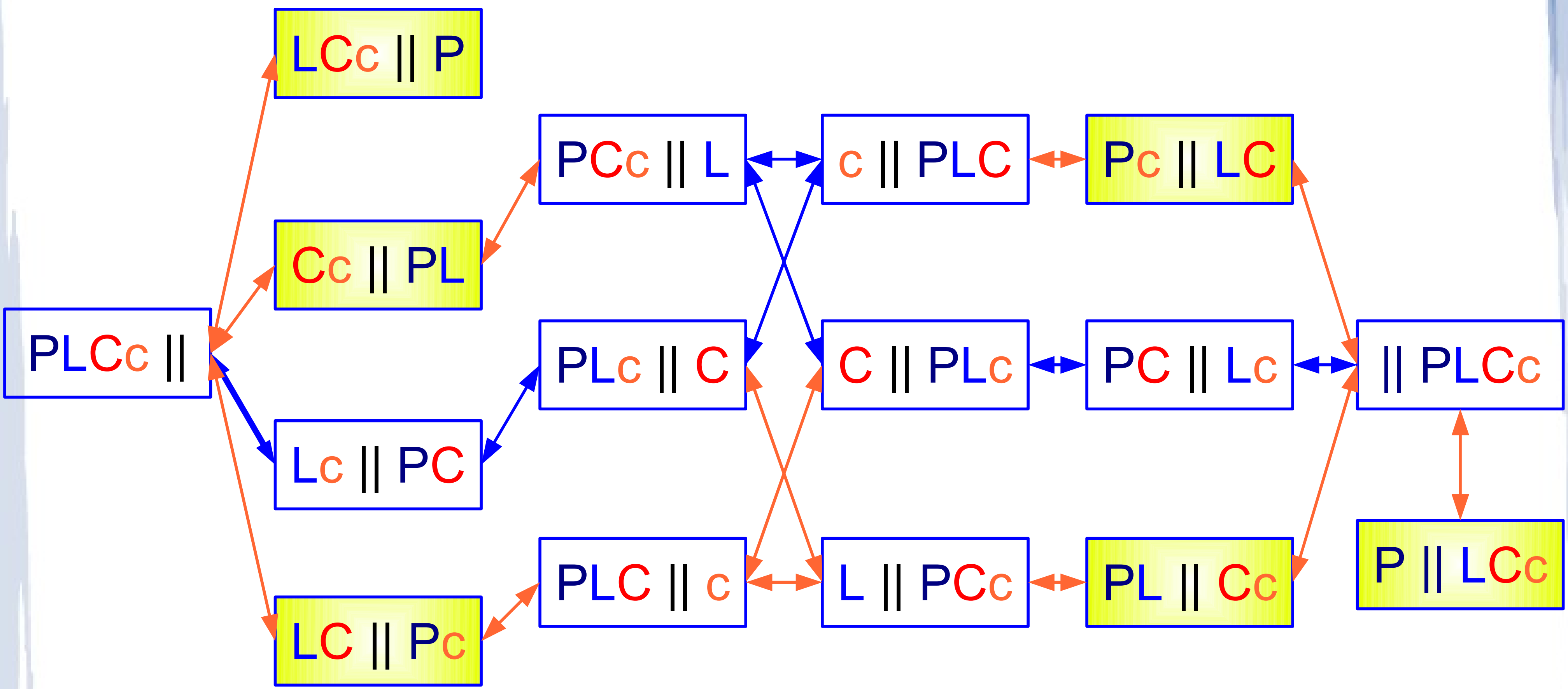
Théorie des Graphes



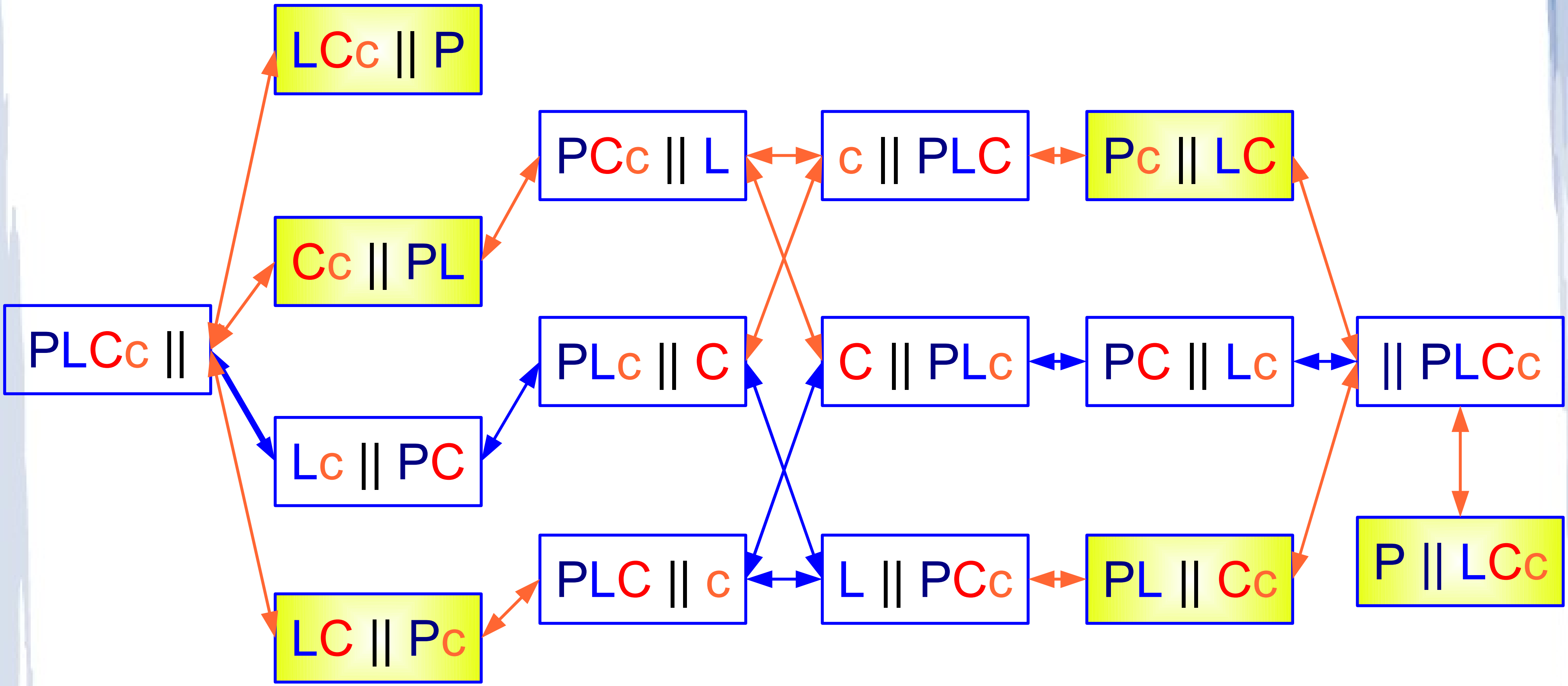
Théorie des Graphes



Théorie des Graphes



Théorie des Graphes



Théorie des Graphes

2. Définition des graphes.

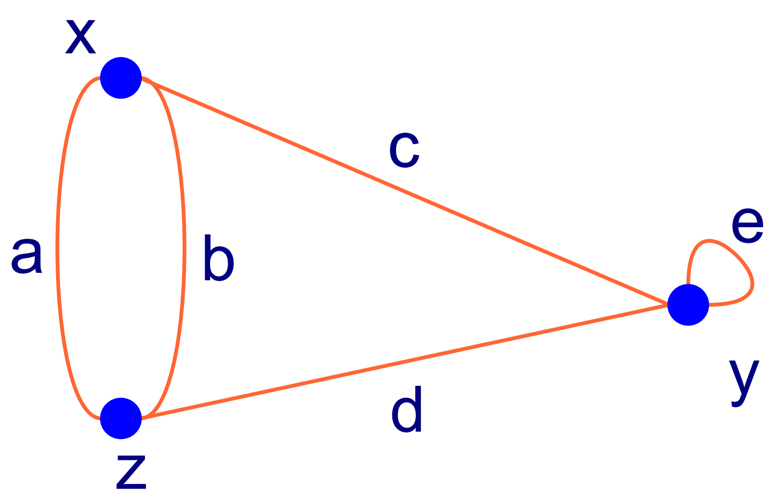
Un graphe (non orienté) G est défini par deux ensembles finis:

- X, non vide, d'éléments appelés sommets
- E d'éléments appelés arêtes

Associés à chaque arête e sont deux sommets x et y; distincts ou non, appelés les extrémités de e

Théorie des Graphes

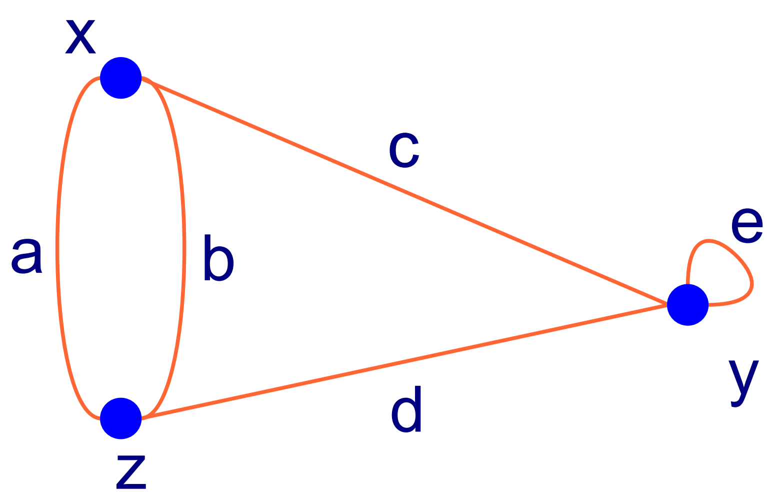
2. Définition des graphes. Exemple



Graphe G = (X,E)

Théorie des Graphes

2. Définition des graphes. Exemple



Graphe G = (X,E)

Le graphe G est défini par deux ensembles:

Ensemble de sommets
X = {x,y,z}

Ensemble d'arêtes
E = {a,b,c,d,e}

Théorie des Graphes

2.1. Notations

On écrit $G = (X,E)$
Les ensembles X, E peuvent être notés $X(G)$ et $E(G)$

Théorie des Graphes

2.1. Notations

On écrit $G = (X,E)$
Les ensembles X, E peuvent être notés $X(G)$ et $E(G)$

On note:

n ou $n(G)$ le cardinal de X, c.à.d., le nombre de sommets du graphe

m ou $m(G)$ le cardinal de E, c.à.d., le nombre d'arêtes du graphe

Théorie des Graphes

2.1. Notations

On écrit $G = (X,E)$
Les ensembles X, E peuvent être notés $X(G)$ et $E(G)$

On note:
 n ou $n(G)$ le cardinal de X, c.à.d., le nombre de sommets du graphe
 m ou $m(G)$ le cardinal de E, c.à.d., le nombre d'arêtes du graphe

La paire des extrémités x et y d'une arête e est noté simplement xy ou yx.

Théorie des Graphes

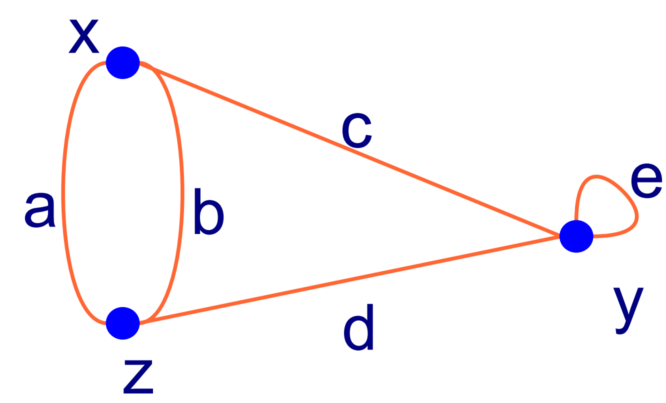
2.2. Représentation

- sommets: points
- arêtes: lignes simples reliant les points d'extrémité

Théorie des Graphes

Exemple

Ensemble de sommets X = {x,y,z}
Ensemble d'arêtes E = {a,b,c,d,e}



Graphe G = (X,E)

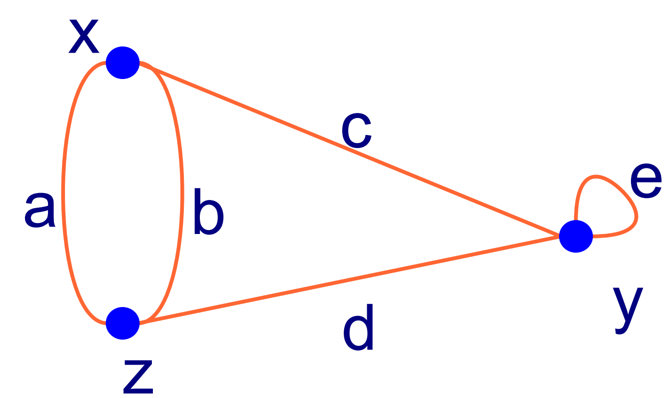
à l'arête a sont associés les sommets d'extrémité x et z
à b sont également associés x et z
à c sont associés x et y
à d sont associés y et z

à e est associé deux fois le sommet y

n(G) = 3 et m(G) = 5

Théorie des Graphes

2.3. Terminologie



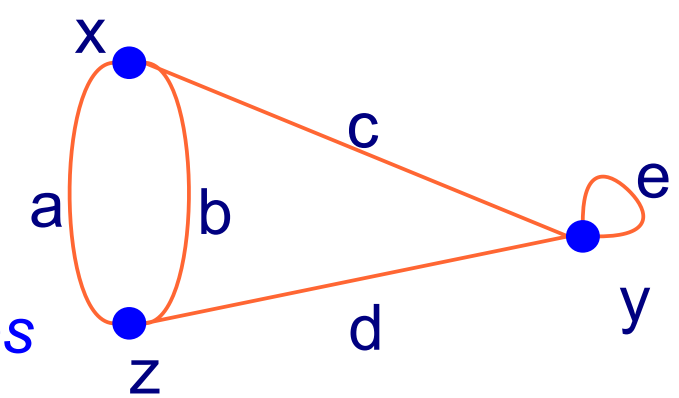
Graphe G = (X,E)

On dit

- que a *relie* les sommets x et z,
- que les sommets x et z sont *voisins*,
- que l'arête a est *incidente* au sommet x et au sommet z

Théorie des Graphes

<u>2.3. Terminologie</u>



Graphe G = (X,E)

L'arête e est appelée une *boucle*

On dit que les arêtes a et b sont *parallèles* et on a une *arête multiple* entre x et z.

Un graphe est dit *simple* s'il n'admet ni de boucles ni d'arêtes multiples.
Ex. G est non simple

Théorie des Graphes

2.3. Terminologie

À un graphe non simple G associé le graphe simple sous-jacent G' défini de la façon suivante

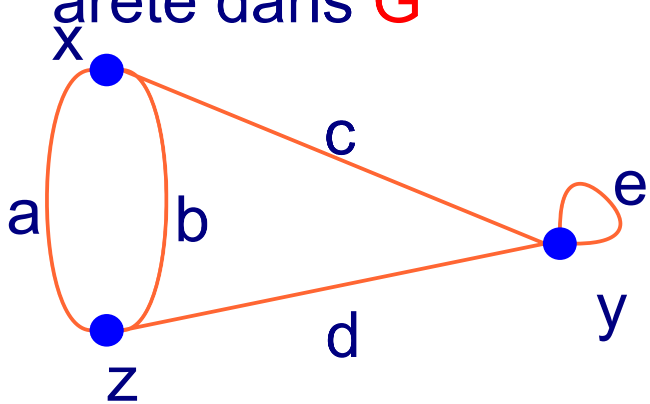
- G' a même ensemble de sommets que G
- Dans G', deux sommets sont reliés par une arête si et seulement s'ils sont distincts et reliés par au moins une arête dans G

Théorie des Graphes

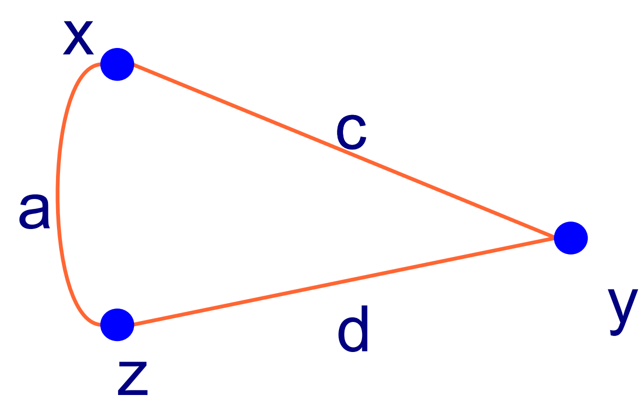
2.3. Terminologie

À un graphe non simple G associé le graphe simple sous-jacent G' défini de la façon suivante

- G' a même ensemble de sommets que G
- Dans G', deux sommets sont reliés par une arête si et seulement s'ils sont distincts et reliés par au moins une arête dans G



Graphe non simple G



Graphe simple sous-jacent G'

Théorie des Graphes

2.4. Isomorphismes et graphes non étiquetés

Un *isomorphisme* d'un graphe $G=(X,E)$ sur un graphe $G'=(X',E')$ est défini par deux bijections

- ϕ de X sur X'
- Ψ de E sur E'

Théorie des Graphes

2.4. Isomorphismes et graphes non étiquetés

Un *isomorphisme* d'un graphe $G=(X,E)$ sur un graphe $G'=(X',E')$ est défini par deux bijections

- ϕ de X sur X'
- Ψ de E sur E'

telles que pour e dans E et x,y dans X, l'arête $\Psi(e)$ a pour extrémités $\phi(x)$ et $\phi(y)$ dans G' ssi l'arête e a pour extrémités x et y dans G

C.à.d., ces bijections préservent la relation d'incidence des arêtes sur les sommets.

Théorie des Graphes

2.4. Isomorphismes et graphes non étiquetés

Un *isomorphisme* d'un graphe $G=(X,E)$ sur un graphe $G'=(X',E')$ est défini par deux bijections

- ϕ de X sur X'
- Ψ de E sur E'

telles que pour e dans E et x,y dans X,
l'arête $\Psi(e)$ a pour extrémités $\phi(x)$ et $\phi(y)$ dans G'
ssi l'arête e a pour extrémités x et y dans G

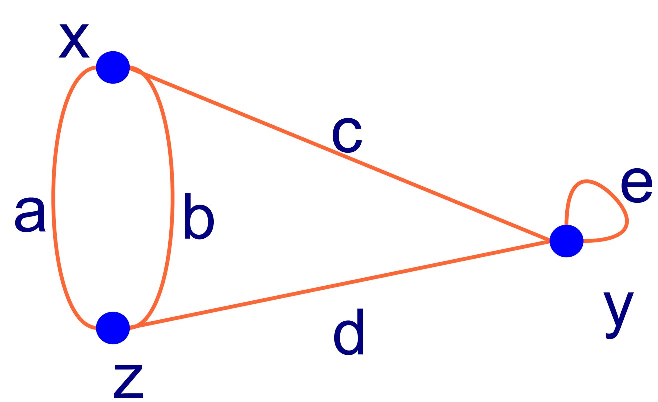
C.à.d., ces bijections préservent la relation d'incidence des arêtes sur les sommets.

Les graphes G et G' sont dits *isomorphes*.

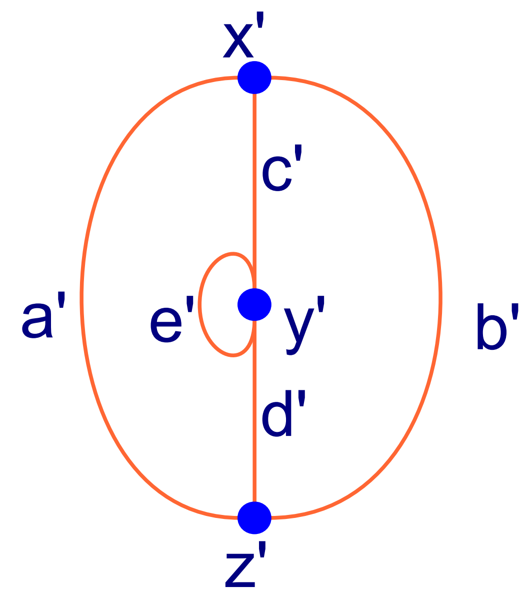
Théorie des Graphes

2.4. Isomorphismes et graphes non étiquetés

Exemple. Graphes isomorphes



Graphe G=(X,E)

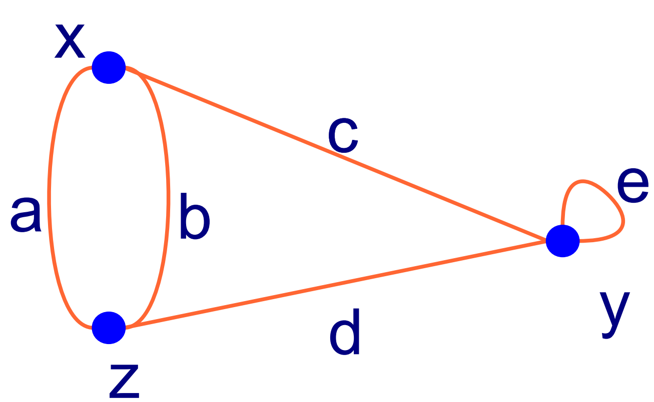


Graphe G'=(X',E')

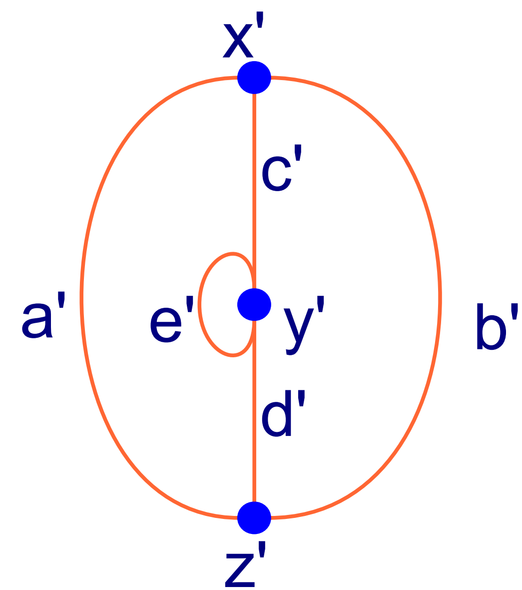
Théorie des Graphes

2.4. Isomorphismes et graphes non étiquetés

Exemple. Graphes isomorphes



Graphe G=(X,E)



Graphe G'=(X',E')

L'isomorphisme est défini par deux bijections:

Φ : $X \rightarrow X'$
$a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$, $c \rightarrow c'$, $d \rightarrow d'$, $e \rightarrow e'$

Ψ : $E \rightarrow E'$
$x \rightarrow x'$, $y \rightarrow y'$, $z \rightarrow z'$

Théorie des Graphes

2.4. Isomorphismes et graphes non étiquetés

Rmq. Deux graphes isomorphes sont en fait identiques quant à leurs structures de graphe:

- ils ont exactement les mêmes propriétés
- ils ne se distinguent que par leurs ensembles d'éléments, sommets et arêtes, concrètement par les noms ou *étiquettes* donnés à ces éléments.

Théorie des Graphes

2.4. Isomorphismes et graphes non étiquetés

Rmq. Deux graphes isomorphes sont en fait identiques quant à leurs structures de graphe:

- ils ont exactement les mêmes propriétés
- ils ne se distinguent que par leurs ensembles d'éléments, sommets et arêtes, concrètement par les noms ou *étiquettes* donnés à ces éléments.

Ici on ne s'intéresse qu'aux propriétés des graphes en tant que graphes, et donc *on ne distingue pas deux graphes isomorphes*. Et *on considère toujours ce qu'on appelle des graphes non étiquetés*.

Théorie des Graphes

2.5. Graphes planaires

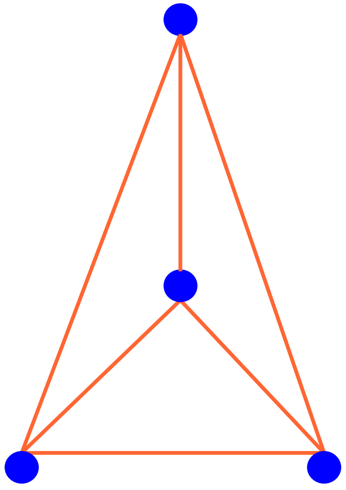
G est un graphe *planaire* si G admet une représentation plane tel que *deux arêtes ne se coupent pas, en dehors d'extrémités communes*

Théorie des Graphes

2.5. Graphes planaires

G est un graphe *planaire* si G admet une représentation plane tel que *deux arêtes ne se coupent pas, en dehors d'extrémités communes*

Exemple. Un graphe planaire.

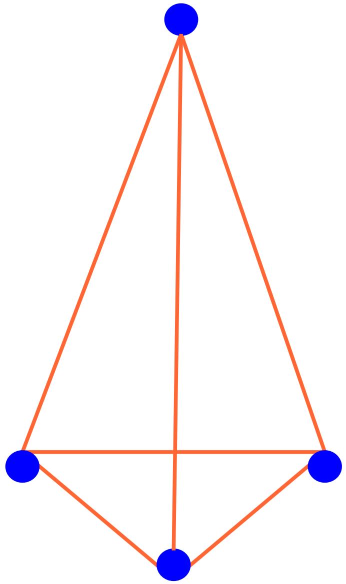


Théorie des Graphes

2.5. Graphes planaires

G est un graphe *planaire* si G admet une représentation plane tel que *deux arêtes ne se coupent pas, en dehors d'extrémités communes*

Exemple. Et ce graphe?

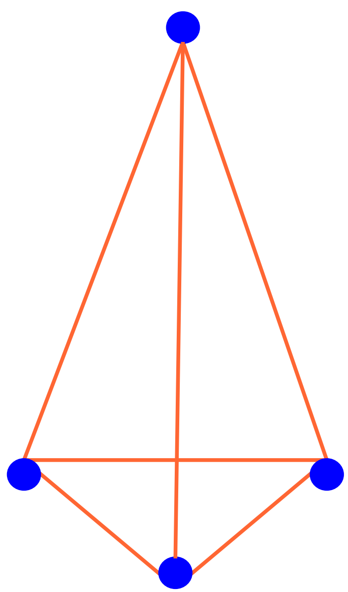


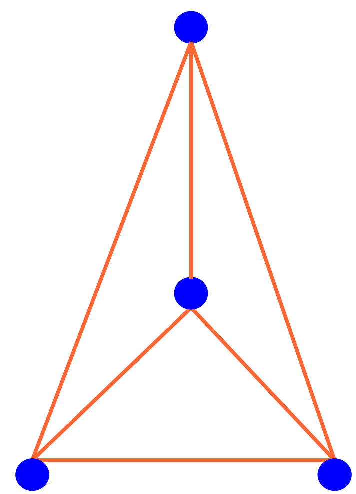
Théorie des Graphes

2.5. Graphes planaires

G est un graphe *planaire* si G admet une représentation plane tel que deux arêtes ne se coupent pas, en dehors d'extrémités communes

Exemple. Oui, voici sa représentation planaire



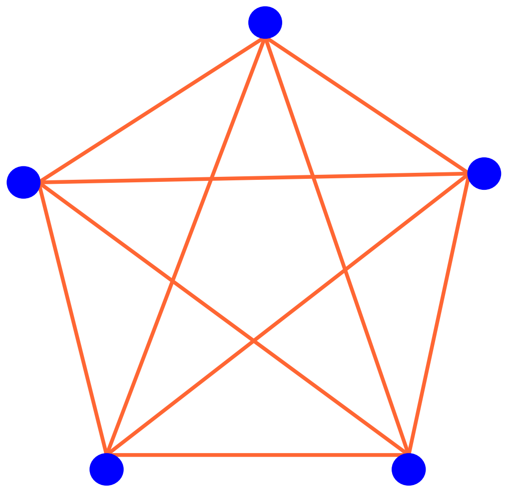


Théorie des Graphes

2.5. Graphes planaires

G est un graphe *planaire* si G admet une représentation plane tel que *deux arêtes ne se coupent pas, en dehors d'extrémités communes*

Exemple. Et ce graphe?



Théorie des Graphes

2.5. Graphes complets

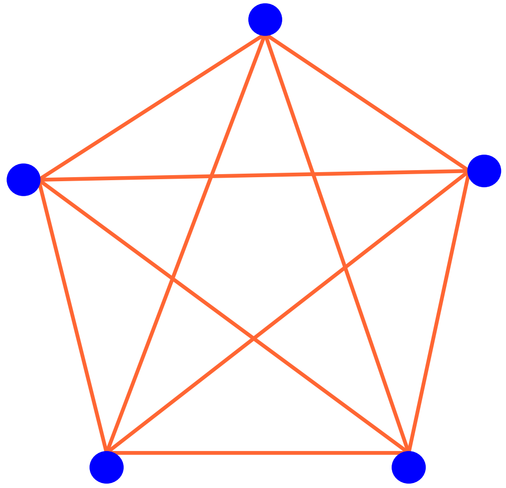
Les graphes *complets* sont les graphes simples tels que *deux sommets distincts quelconques sont reliés par une arête*.

Théorie des Graphes

2.5. Graphes complets

Les graphes *complets* sont les graphes simples tels que *deux sommets distincts quelconques sont reliés par une arête*.

Exemple. Graphe complet à 5 sommets.



Théorie des Graphes

2.5. Graphes complets

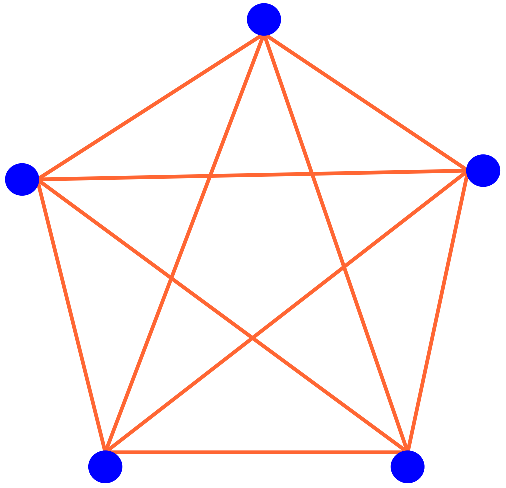
Comme graphe non étiqueté, un graphe complet est simplement déterminé par son nombre de sommets n, et on le note d'une façon générale K_n

Théorie des Graphes

2.5. Graphes complets

Comme graphe non étiqueté, un graphe complet est simplement déterminé par son nombre de sommets n, et on le note d'une façon générale K_n

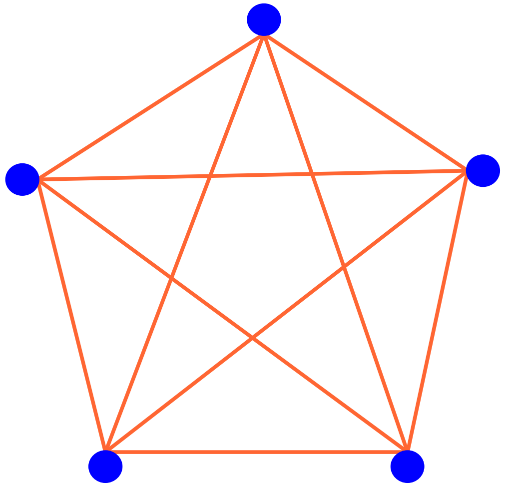
Exemple. Graphe complet K_5
Nombre de sommets 5
Nombre d'arêtes $m(K_5) = 10$



Théorie des Graphes

2.5. Graphes complets

Comme graphe non étiqueté, un graphe complet est simplement déterminé par son nombre de sommets n, et on le note d'une façon générale K_n



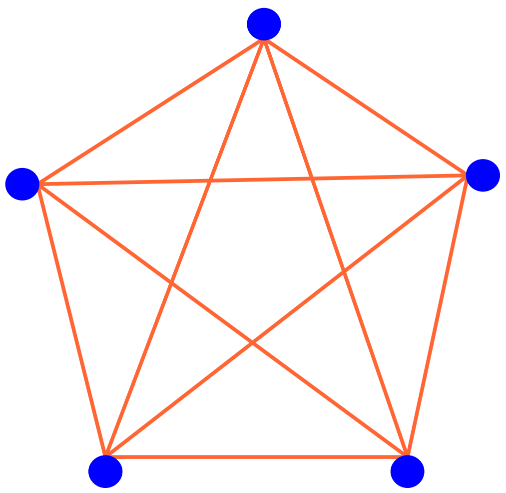
Exemple. Graphe complet K_5
Nombre de sommets 5
Nombre d'arêtes $m(K_5) = 10$

En général, $m(K_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Théorie des Graphes

2.5. Graphes complets

Comme graphe non étiqueté, un graphe complet est simplement déterminé par son nombre de sommets n, et on le note d'une façon générale K_n



Exemple. Graphe complet K_5

Nombre de sommets 5

Nombre d'arêtes $m(K_5) = 10$

En général, $m(K_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Corollaire. Dans un graphe simple G, on a l'inégalité suivante

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Théorie des Graphes

3. Sous-graphes

Soit G=(X,E) un graphe. Un *sous-graphe* de G est un graphe G'=(X',E') où

- X' est inclus dans X
- E' est inclus dans E
- Toute arête de E' a ses extrémités dans X'

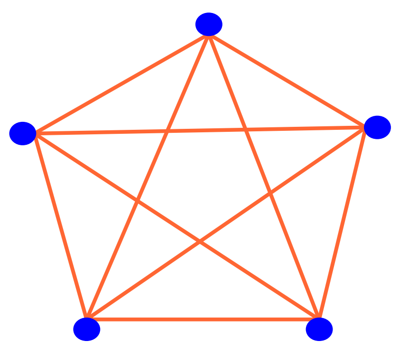
Théorie des Graphes

3. Sous-graphes

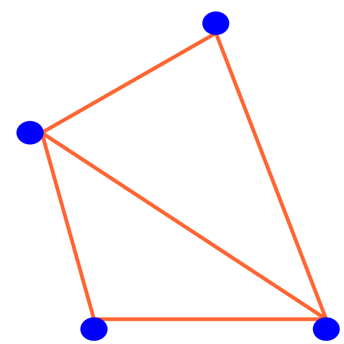
Soit G=(X,E) un graphe. Un *sous-graphe* de G est un graphe G'=(X',E') où

- X' est inclus dans X
- E' est inclus dans E
- Toute arête de E' a ses extrémités dans X'

Exemple.



G=(X,E)



G'=(X',E')

Théorie des Graphes

3. Sous-graphes

Un sous-graphe G'=(X',E') de G=(X,E) est dit *engendré* (ou induit), et on peut préciser par un ensemble de sommets X' si *E' est l'ensemble des arêtes de E qui ont leurs extrémités dans X'.*

On note ce sous-graphe engendré $G_{X'}$

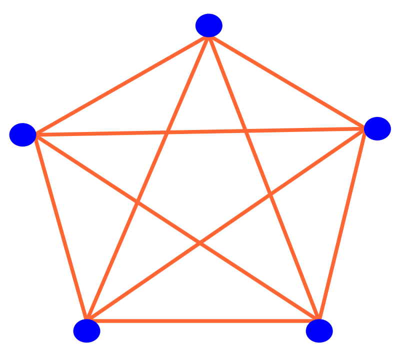
Théorie des Graphes

3. Sous-graphes

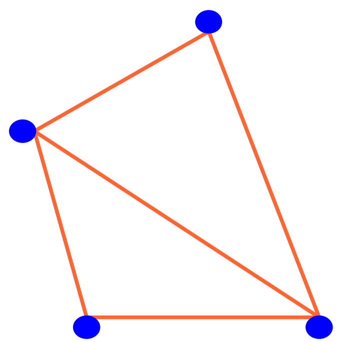
Un sous-graphe G'=(X',E') de G=(X,E) est dit *engendré* (ou induit), et on peut préciser par un ensemble de sommets X' si
E' est l'ensemble des arêtes de E qui ont leurs extrémités dans X'.

On note ce sous-graphe engendré $G_{X'}$

Exemple.



G=(X,E)



G'=(X',E')
n'est pas engendré
pourquoi?

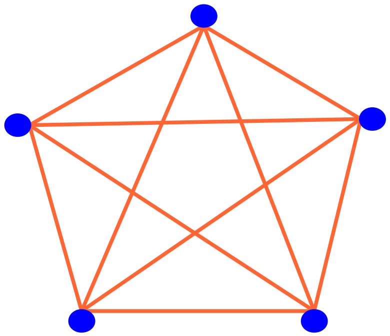
Théorie des Graphes

3. Sous-graphes

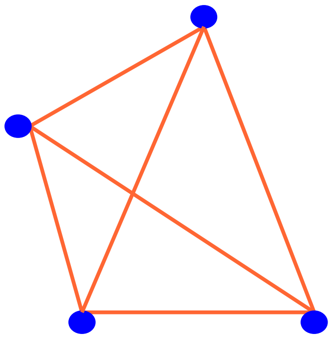
Un sous-graphe G'=(X',E') de G=(X,E) est dit *engendré* (ou induit), et on peut préciser par un ensemble de sommets X' si
E' est l'ensemble des arêtes de E qui ont leurs extrémités dans X'.

On note ce sous-graphe engendré $G_{X'}$

Exemple.



G=(X,E)



$G_{X'}$

le sous-graphe engendré par X'

Théorie des Graphes

3. Sous-graphes

Un sous-graphe $G'=(X',E')$ de $G=(X,E)$ est dit *couvrant* si $X'=X$

On dit aussi que G' est un graphe *partiel* de G

Théorie des Graphes

3. Sous-graphes

Un sous-graphe G'=(X',E') de G=(X,E) est dit *couvrant* si X'=X

On dit aussi que G' est un graphe *partiel* de G

On peut préciser le graphe partiel engendré par E', c'est le graphe (X,E') et on le note $G_{E'}$

Théorie des Graphes

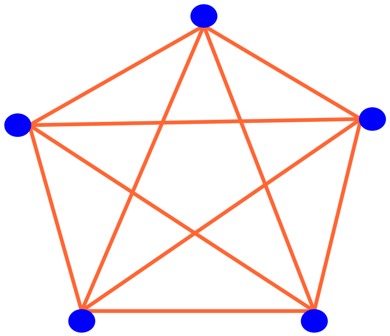
3. Sous-graphes

Un sous-graphe G'=(X',E') de G=(X,E) est dit *couvrant* si X'=X

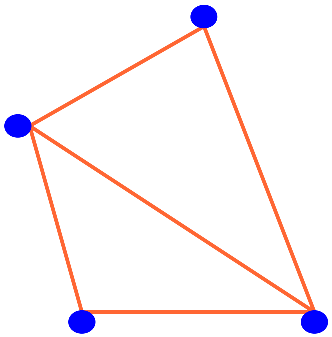
On dit aussi que G' est un graphe *partiel* de G

On peut préciser le graphe partiel engendré par E', c'est le graphe (X,E') et on le note $G_{E'}$

Exemple.



G=(X,E)



G'=(X',E')
n'est pas partiel pourquoi?

Théorie des Graphes

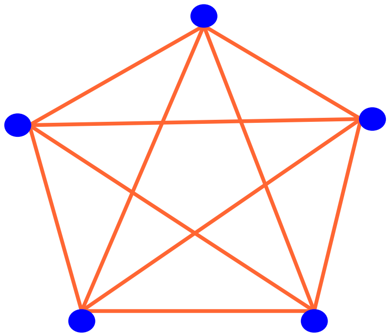
3. Sous-graphes

Un sous-graphe G'=(X',E') de G=(X,E) est dit *couvrant* si X'=X

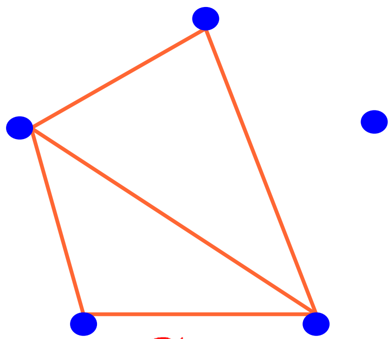
On dit aussi que G' est un graphe *partiel* de G

On peut préciser le graphe partiel engendré par E', c'est le graphe (X,E') et on le note $G_{E'}$

Exemple.



G=(X,E)



$G_{E'}$

le graphe partiel engendré par E'

Théorie des Graphes

3.1. Notations courantes

Soit un graphe G=(X,E) et X' inclus dans X, E' inclus dans E.

G-X' désigne le sous-graphe de G engendré par X/X'

G-E' désigne le graphe partiel de G engendré par E/E'

En particulier, on écrira G-x et G-e.

Théorie des Graphes

3.1. Notations courantes

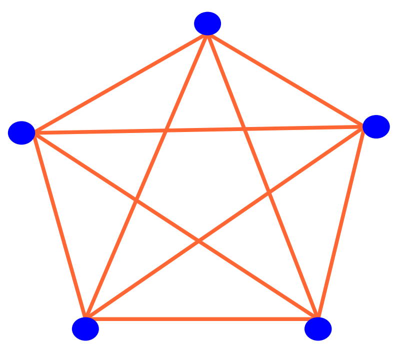
Soit un graphe G=(X,E) et X' inclus dans X, E' inclus dans E.

G-X' désigne le sous-graphe de G engendré par X/X'

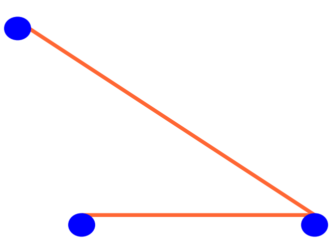
G-E' désigne le graphe partiel de G engendré par E/E'

En particulier, on écrira G-x et G-e.

Exercice. Déterminez G-X' et G-E' dans l'exemple suivant



G=(X,E)



(X',E')

Théorie des Graphes

3.1. Notations courantes

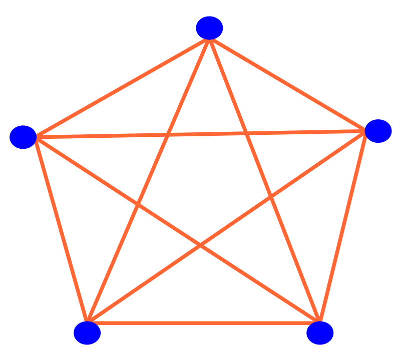
Soit un graphe G=(X,E) et X' inclus dans X, E' inclus dans E.

G-X' désigne le sous-graphe de G engendré par X/X'

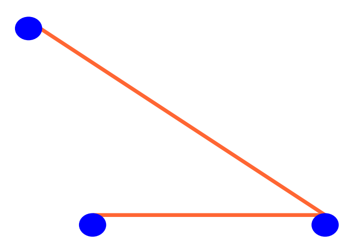
G-E' désigne le graphe partiel de G engendré par E/E'

En particulier, on écrira G-x et G-e.

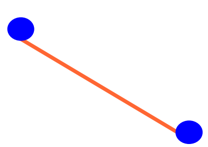
Exercice. Déterminez G-X' et G-E' dans l'exemple suivant



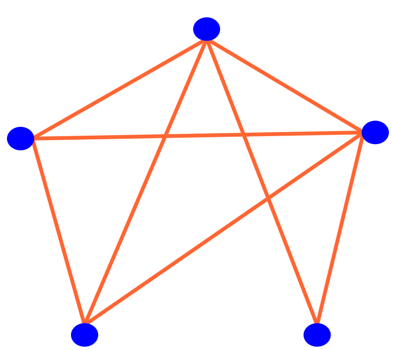
G=(X,E)



(X',E')



G-X'



G-E'