L'Indépendance de l'Hypothèse du Continu de la Théorie des Ensembles

Réalisé par: Laura Fontanella

Paris (France) 20 mai 2007

A papà

Table des matières

Introduction

En théorie des ensembles, l'hypothèse du continu, due à Georg Cantor, affirme qu'il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est strictement compris entre le cardinal de l'ensemble des entiers naturels et celui l'ensemble des nombres réels. Les mathématiciens lui vouent une importance certaine, puisqu'elle est le premier problème des 23 problèmes de Hilbert.

Cantor, en mettant en place la théorie axiomatique des ensembles, avait défini les cardinaux des ensembles infinis, qu'il appelait alors nombres transfinis, dans le but de comparer les différents infinis. Au fur et à mesure de la formation de sa théorie, il arrivait à comparer les cardinaux de $\mathbb{N}$, qui correspond au dénombrable, et de $\mathbb{R}$, qui correspond au continu. Ainsi, au travers de son hypothèse sur le continu, Cantor « hiérarchisait » ces différents transfinis, mais, il ne pouvait pas démontrer son hypothèse. Et pour cause : cette hypothèse n'est pas démontrable dans la théorie des ensembles usuelle, elle n'est d'ailleurs pas non plus réfutable, elle est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles.

Kurt Gödel a montré en 1938 que l'ajout de l'hypothèse du continu à la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, ne changeait nullement la consistance de cette théorie, même si on l'augmente de l'axiome du choix.

Paul Cohen a montré en 1963 que l'hypothèse du continu n'était pas démontrable dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Elle est donc indépendante de la théorie des ensembles (voir [Cohen, 1963]).

L'hypothèse généralisée du continu déclare qu'il n'existe pas d'ensemble dont le cardinal serait strictement compris entre $\aleph_\alpha$ et $2^{\aleph_\alpha}$, pour un certain ordinal α. Autrement pour tout ordinal α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$: il n'y aurait rien entre un cardinal et l'ensemble de ses parties, à bijection près. Cette hypothèse est aussi un indécidable d'après les travaux de Gödel et Cohen.

En outre, puisque la théorie constituée des axiomes de Zermelo-Fraenkel + l'hypothèse généralisée du continue implique l'axiome du choix, en particulier l'axiome du choix aussi est indépendant de la théorie des ensembles. En effet la théorème de Gödel du 1938, fondé sur la hierarchie de ensembles constructibles, démontrait la consistance relative de l'hypothèse du continu mais aussi de l'axiome du choix.

Dans ce mémoire on s'occupera de la démonstration que l'hypothèse du continu n'est pas démontrable dans la théorie des ensembles. Pour la démonstration de ce résultat Cohen s'est servi d'une méthode pour construire modèles de la théorie des ensembles dont lui même est l'inventeur : le Forcing. La première partie de cette exposition est, donc, consacrée à l'explication de la méthode du Forcing.

Chapitre 1

La méthode du Forcing

1.1 L'idée générale du Forcing

Notre but est prouver la consistence rélative de l'Hypothèse du Continu. Ce qu'on fait généralement, lorsque on cherche un modèle de certains axiomes est : on cherche à définir une classe transitive M de l'univers, telle que la relativisation des axiomes à M soit démontrable. Supposons alors, qu'on puisse construire une classe transitive M telle que $ZF^M + \neg HC^M$. On sait que L est la plus petite classe qui est un modèle de ZF, on aurait donc $L \subseteq M$. Mais Gödel a montré que $ZF \vdash HC^L$, donc on devrait admettre $L \neq M$. Cela signifie que si une telle classe M était définissable dans ZF, alors il serait prouvable $ZF \vdash V \neq L$. Mais cela contradit le fait que l'axiome de constructibilité ($V \neq L$) est consistant avec ZF, c'est à dire $Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + V = L)$. La methode qu'on vient de décrire alors, ne peut pas marcher.

Qu'est ce qu'on peut faire, donc ? La méthode qu'on vient de décrire consiste à restreindre l'univers : on part de l'univers et on se place dans un univers plus petit (M dans l'exemple précédent). Ce qu'on fera avec la methode du forcing, en revanche, sera *agrandir* l'univers. On part d'un modèle M de $ZF + AC$ (qui satisfait certains conditions techniques) et, on lui adjoint des objets, de façon à obtenir un nouveau univers qui en soit une extension et qui satisfasse la propriété désirée. Par exemple, en ajoutant beaucoup de nouvelles parties de ω, on peut obtenir un modèle M' dans lequel $\mathscr{P}(\omega)$ a une cardinalité supérieure à celle de l'ensemble des parties de ω qui sont dans M (i.e. $(\mathscr{P}(\omega))^M$). On a alors, $M' \models \omega < \#(\mathscr{P}(\omega))^M < \#(\mathscr{P}(\omega))$, c'est à dire M' satisfait la negation de l'hypothèse du continu.

Dans tout ce chapitre M désignéra le *modèle de base,* c'est à dire un modèle de ZFC qui est un ensemble transitive de l'univers $\mathscr{U}$.

Or, comment peut-on adjoindre des objets au modèle de base M? Ca serai, peut être, une bonne idée de commincer par une analogie. On veut construire un univers qui contient un ensemble non constructible a. Il faudra expliciter un ensemble de *"conditions"* qui nous garantissent que pour tout ensemble b constructible, a e b soient differents pour un certain x. Soit par exemple, c un ensemble constructible, on peut établir "(il y a un ensemble x tel que) $x \in a$ et $x \notin c$". En choisissant bien les conditions on peut définir les éléments de a et, ainsi, construire un nouveau ensemble à rajouter à M. On peut bien affirmer que : une condition qui affirme que a contient deux éléments x et y est *plus forte* d'une condition qui affirme seulement que a contient x. Nous avons, alors, une notion intuitive de "condition plus forte d'une autre" et cette relation est reflexive et transitive, donc elle est un préordre.

Analogament, dans la méthode du forcing, on commince par se donner un ensemble de *conditions de forcing.* Il s'agit d'un ensemble C de l'univers M, preordonné par une relation $\leq$. Les éléments de C doivent être pensés comme des morceau d'informations, ou comme des individues "affirmant" quelquechose. La relation $\leq$ est telle que : pour tout $p, q \in C$, $p \leq q$ ssi "q est plus forte que p", c'est à dire le contenu informatif de q est plus grand que celui de p.

Si une condition p "affirme" X, on écrit "$p \Vdash X$". Les conditions plus fortes que p doivent affirmer au moins X, et ne pas affirmer des choses qui contradisent X. Autrement les informations sont préservées lorsqu'on passe d'une condition à une autre qui est plus forte. Les conditions donc, se comportent comme des mondes possibles liés par la rélation d'accessibilité $\leq$. Dire que $p \Vdash X$ dans ce sens, est comme établire que $p \models \Box X$, car si $p \Vdash X$, alors p affirme X et toutes les conditions plus fortes que p, donc toutes les conditions qui lui sont accessibles, affirment X aussi.

1.2 Les filtres génériques

Dans l'exemple de depart nous avons dit que : on peut construire un ensemble non constructible a, en choisissant bien les conditions. Autrement, on construit a par approximations : chaque condition affirmera la presence de tel ou tel ensemble dans a. En prenant des conditions de plus en plus fortes, et non contradictoire entre eux, on peut définir tous les éléments de a.

Considerons le suivant exemple.

Exemple 1.2.1 *Supposons qu'on veut rajouter un sousensemble a de ω, on construit sa fonction caractéristique $f : \omega \to 2$ par approximations. On prend comme en-*

semble de conditions de forcing l'ensemble $C = \{p; p$ *est une fonction,* $dom(p) \subset \omega$ *et* $Im(p) \subseteq 2\}$, *et on préordonne* C *par l'inclusion. On cherche* $G \subseteq C$ *tel que* $\bigcup G = f$.

Le contenu informatif des ces conditions de forcing est donné par ses images : supposons que $p(n) = 1$ pour un certain $n \in \omega$, alors si la condition $p \in G$, on a $f(n) = 1$, donc $n \in a$. On peut bien affirmer donc, que si $q \subseteq p$, alors p contient plus d'informations que q.

Pas seulement dans cet exemple mais, dans tous les cas où on fait du forcing, il faut choisir convenablement une partie G de l'ensemble des conditions C : l'ensemble G contiendra, parmi les conditions de forcing, celles qui servent à définir les éléments qu'on vaut rajouter au modèle de base M.

Or, il faut bien choisir G : les conditions de forcing ne sont pas toutes compatibles entre eux. Dans ce cas, par exemple, il existe $n \in w$ et $p, q \in C$ tels que $p(n) \neq q(n)$, il faut donc que p ou q n'appartient pas à G, sinon $\bigcup G$ ne sera pas une fonction. En générale, si on a deux conditions de forcing p, q tels que ni $p \leq q$ ni $q \leq p$, a priori il est possible que $p \Vdash X$ et $q \Vdash \neg X$. Mais si on a aussi une condition r telle que $p \leq r$ et $q \leq r$ alors on obtiendrait une contradition : si $p \Vdash X$ cela veut dire que $p \models \Box X$, donc $r \Vdash X$. Mais $q \Vdash \neg X$ donc, analogament, $r \Vdash \neg X$. Donc $r \Vdash X$ et $r \Vdash \neg X$, contradiction.

On prend alors, parmi les conditions de C, seulement celles qui sont compatibles entre eux, c'est à dire celles qui ont une condition qui les majeure.

Définition 1.2.2 *On dit que deux conditions de forcing* p *et* q *sont* compatibles *(et on l'ecrit* $p//q$*) ssi* $\exists r(p \leq r \wedge q \leq r)$. *Si* p *et* q *sont incompatibles, on l'ecrit* $p \perp q$.

Dans ce cas, si $q \in G$ et $p \leq q$ alors q est une extension de p donc, puisque $q \in G$ on a que p aussi appartient à G. Ainsi G satisfait la condition : si $q \in G$ et $p \leq q$, alors $p \in G$. En générale, soit q une condition de G, n'import quelle condition plus faible que q est encore dans G. Mais alors G n'est que un *filtre,* qui "épure" C de toutes les condition qui ne sont pas compatibles.

Définition 1.2.3 *Un filtre sur un ensemble préordonné* (C, R), *est un sousensemble* G *de* C *tel que :*
(1.) pour tout $p, q \in G$, *il existe* $r \in G$ *tel que* pRr *et* qRr;
(2.) pour tout $q \in G$, *si* pRq *alors* $p \in G$.

En posant G égale à un filtre sur C, on a la garantie que si $p, q \in G$ et $n \in dom(p) \cap dom(q)$ alors $p(n) = q(n)$, grace à la condition (1.). Or, il faut définir pour tout $n \in \omega$ la valeur $f(n)$. Soit $n \in \omega$, on pose $D_n = \{p \in C; n \in dom(p)\}$. On a $\forall q \in C, \exists p \in D_n(q \subseteq p)$. On dit que D_n est un ensemble dense.

Définition 1.2.4 *Soit $(C, \leq)$ un ensemble préordonné et soit $D \subseteq C$, on dit que D est* dense *sur $(C, \leq)$ ssi pour tout $p \in C$ il existe $q \in D$ tel que $p \leq q$.*

Pour qu'on ait la valeur de $f(n)$ pour tout $n \in \omega$ il faudrais alors que : pour tout $n \in \omega$, $D_n \cap G \neq \emptyset$. Il faut donc, que G soit ce qui est appelé un *filtre générique*.

Définition 1.2.5 *Soient M un ensemble, $(C, \leq) \in M$ un ensemble préordonné et $G \subseteq C$. On dit que G est un $C-$*générique sur *M (souvent on dira simplement* filtre générique, *pour brévité) ssi :*
(1.) pour tout $p, q \in G$, il existe $r \in G$ tel que $p \leq r$ et $q \leq r$;
(2.) pour tout $q \in G$, si $p \leq q$ alors $p \in G$;
(3.) pour tout $D \in M$ dense sur C, $D \cap G \neq \emptyset$.

Quelque mot sur la condition (3.) : on vient d'expliquer pourquoi cette condition est nécéssaire pour la construction de la fonction f. Mais il est vrai *en générale* que à chaque énoncé X qui affirme quelquechose sur le modèle étendu, correspond un ensemble dense : l'ensemble de toutes les conditions qui affirment X ou $\neg X$. Appelons cet ensemble D, on peut justifier qu'il s'agit d'un ensemble dense en utilisant l'analogie avec l'opérateur $\Box$: soit $q \in C$, si $q \Vdash X$ alors $q \in D$. Sinon, $q \nvDash \Box X$, c'est à dire $q \vDash \Diamond \neg X$, d'où $\exists r$ t.q. $q \leq r$ et $r \Vdash \neg X$. Donc $r \in D$.

Montrons maintenante un resultat qui sera très utile dans la suite :

Proposition 1.2.6 *Soient G un filtre générique et $p, q \in G$, les conditions p et q ont un majeurant commun dans G.*

Preuve. Soit $D = \{r \in C; r \perp p \vee (p \leq r \wedge r \perp q) \vee (p \leq r \wedge q \leq r)\}$. Il est clair que $D \in M$; de plus D est dense. Soit alors, $r \in D \cap G$. Puisque $r, p, q \in G$, alors $r//p$ et $r//q$. Comme $r \in D$, on a $p \leq r$ et $q \leq p$. ■

Nous avons compris le rôle de G, maintenant il faut repondre à la question : est ce que un tel G existe toujours ? Heureusement la réponse est positive, *à condition que M soit dènombrable.* Ici dessous vous en trouvez une démonstration :

Théorème 1.2.7 *Soit M un modèle de $ZF + AC$ qui est un ensemble dénombrable de l'univers $\mathscr{U}$, et soit $(C, \leq)$ un ensemble préordonné de M. Pour chaque $p \in C$ il existe dans $\mathscr{U}$ un ensemble G qui est $C-$générique sur M tel que $p \in G$*

Preuve. Soit $(D_n)_{n\in\omega}$ une énumération de l'ensemble des parties denses de C qui sont dans M. On définit une suite $(q_n)_{n\in\omega}$ telle que $p = q_0 \leq q_1 \leq ...$ et pour tout n, $q_{n+1} \in D_n$. Observons qu'il faut l'axiome du choix pour remplir cette opération. G sera le filtre engendré par $\{q_n; n \in \omega\}$, c'est à dire $G = \{p \in C; \exists n \in \omega(p \leq q_n)\}$. ■

1.3 Un modèle dénombrable pour ZFC

Afin que la condition initial du Théorème 1.2.7 soit vérifiée il faut savoir fabriquer un modèle dénombrable de $ZF + AC$. On va montrer l'existance d'un tel modèle. On aura besoin de deux resultats fondamentals. Rappelons, avant tout, le Schema de Réflexion :

Théorème 1.3.1 *(AF) Soit $\varphi(x_1, ..., x_n)$ un énoncé sans paramètre ; alors pour tout ordinal α, il existe un ordinal limite $\beta > \alpha$ tel que $\forall x_1, ..., x_n \in V_\beta(\varphi(x_1, ..., x_n) \iff \varphi^{V_\alpha}(x_1, ..., x_n)$.*

On utilisera aussi le Théorème de Löwenheim Skolem *dans ZF*, c'est à dire à l'aide de la codification des formules. Dans la formulation du théorème et dans sa démonstration il faut entendre *formule (close, à paramètres etc....)* par *code de formule (close, à paramètres etc...)*, égualement pour tout $\phi \in For(\mathscr{L})$ on écrira simplément ϕ au lieu de $\ulcorner\phi\urcorner$, pour dénoter le code de ϕ.

Théorème 1.3.2 *(AC) Soient X un ensemble, P une partie de X et A l'ensemble des formules closes à paramètres dans P qui sont satisfaites dans X. Il existe un sousensemble Y de X tel que $\#(Y) \leq \#(P) + \aleph_0, P \subseteq Y$, et tel que toute formule de A soient satisfaite dans Y.*

Preuve. On considère une application $\theta : \mathscr{P}(X) - \emptyset \to X$ telle que $\theta(U) \in U$ pour toute partie U non vide de X (axiome du choix). On définit par induction une suite croissante $P_n (n \in \omega)$ de partie de X :
$P_0 = P$; P_n étant donné on définit P_{n+1} de la façon suivante : on considère l'ensemble $\mathscr{G}_n$ des formules $\phi(x, a_1, ..., a_r)$ à une variable libre et à paramètre dans P_n telles que $\exists x \phi(x, a_1, ..., a_r)$ soit satisfaite dans X; alors P_{n+1} est l'ensemble des $\theta(U_\phi)$ lorsque ϕ décrit $\mathscr{G}_n$, avec $U_\phi = \{\xi \in X; \phi(\xi, a_1, .., a_r)$ est satisfaite dans X $\}$.

$P_n \subseteq P_{n+1}$: en effet la formule $x = a$ appartient à $\mathscr{G}_n$ si $a \in P_n$ et pour cette formule $U_\phi = \{a\}$ donc $\theta(U_\phi) = a$. Comme le cardianl de l'ensemble des formules à paramètres dans P_n est $\#(P_n) + \aleph_0$, on a $\#(\mathscr{G}_n) \leq \#(P_n) + \aleph_0$. Donc $\#(P_{n+1}) \leq \#(P_n) + \aleph_0$, puisque l'application que à toute ϕ associe $\theta(U_\phi)$ est une surjection de $\mathscr{G}_n$ sur P_{n+1}. On a donc, par induction $\#(P_n) \leq \#(P) + \aleph_0$. On pose $Y = \bigcup_{n\in\omega} P_n$. Donc $\#(Y) \leq \#(P) + \aleph_0$ et $P \subseteq Y$.

Soit $\phi(a_1, ..., a_k)$ une formule close à paramètres dans Y. On montre par induction sur la longueur de ϕ, qu'elle est satisfaite ou non satisfaite à la fois par X et Y. C'est évident si ϕ est atomique. Si ϕ est $\neg\psi$ (resp. $\psi \vee \chi$), ϕ est satisfaite dans Y si et seulement si ψ ne l'est pas (resp. ψ ou χ est satisfaite dans Y) donc si et seulement si ψ est non staisfaite dans X, d'après l'hypothèse de recurrence (resp. ψ ou χ est satsiafite dans X), donc si et seulement si ψ est satisfaite dans X. Si ϕ est $\exists x\psi(x, a_1, ..., a_k)$, supposons d'abord ψ satisfaite dans X. Alors pour n assez grand, $a_1, ..., a_k \in P_n$, donc $\phi(x, a_1, ..., a_k) \in \mathscr{G}_n$. Donc : $\theta(U_\psi) = a \in P_{n+1}$ et $\psi(a, a_1, ..., a_k)$ est satisfaite dans X (par définition de θ et U_ψ). Comme $\phi(a, a_1, ..., a_k)$ est de longueur strictement inférieur à celle de ϕ, on voit (hypothèse de recurrence) que $\psi(a, a_1, ..., a_k)$ est satisfaite dans Y, et donc aussi $\phi(a, a_1, ..., a_k)$. Inversement si $\exists x\psi(x, a_1, ..., a_k)$ est satisfaite dans Y, il existe $a \in Y$ tel que $\psi(a, a_1, ..., a_k)$ soit satisfaite dans Y. D'après l'hypothèse de recurrence $\psi(a, a_1, ..., a_k)$ est satisfaite dans X, donc aussi $\exists x\psi(x, a_1, ..., a_k)$. En particulier on a montré que toute formule de A est satisfaite dans Y. ∎

On a, enfin, les instruments pour construire un modèle dénombrable de ZFC.

Théorème 1.3.3 *Soit $\mathscr{T}$ une théorie (du langage $\mathscr{L}$ de la théorie des ensembles) qui comporte tous les axiomes de $ZF + AC$. Si $\mathscr{T}$ est non contradictoire, alors il l'est également la théorie $\mathscr{T}^*$ suivante du langage $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{m\}$: $\mathscr{T} + \mathscr{T}^m +$ «m est un ensemble transitif dénombrable» (où $\mathscr{T}^m$ est la théorie obtenue en relativisant chaque axiome de $\mathscr{T}$ à m).*

Preuve. Supposons par absurd que $\mathscr{T}^*$ est contradictoire, alors il existe $\sigma_1^m, ..., \sigma_n^m \in \mathscr{T}$ tels que $\mathscr{T} + \bigwedge_{i=1}^n \sigma_i^m$+«m est un ensemble transitif dénombrable» est contradictoire. Soit $\mathfrak{A} \in Mod(\mathscr{T})$, on a $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i=1}^n \sigma_i$. Par le théorème de réflexion, il existe $\alpha \in On$ tel que $V_\alpha \models \bigwedge_{i=1}^n \sigma_i$. Puisque $\mathfrak{A} \models AC$ on peut appliquer le Théorème 1.3.2 pour affirmer qu'il existe un sousensemble dénombrable a de V_α tel que $a \prec V_\alpha$. L'ensemble a donc, satisfait $\bigwedge_{i=1}^n \sigma_i$ et a est extensionnelle car V_α (donc a) satisfait l'axiome d'extensionalité. Il existe alors, un ensemble transitif b isomorphe à a. Dans l'univers $\mathfrak{A}$ on interprète m par b. Ainsi $\mathfrak{A}$ est un modèle de $\mathscr{T} + \bigwedge_{i=1}^n \sigma_i^m$+«m est un ensemble transitif dénombrable», ce qui contredit le fait qu'elle est contradictoire. ∎

1.4 Définition du modèle $M[G]$.

Dans tout cette section C désignéra un ensemble de conditions de forcing quelconque et G un C- filtre générique sur M. On va montrer comment de G on obtient une extension de M, appelons-la M'. Le Théorème 1.2.7 montre l'existence de G *dans l'univers $\mathscr{U}$*. Considerons encore une fois l'Exemple 1.2.1 : si G appartient à M alors $\bigcup G \in M$. Donc, puisque $\bigcup G$ est la fonction caractéristique de a, on a aussi $a \in M$. Mais si $a \in M$, alors nous n'avons rien rajouté à M. En générale, afin que l'extension de M obtenue par G soit propre, il faut que G ne soit pas un élément de M. Il faut donc, construire l'extension de M de façon qu'elle contienne G et que M

ne le contienne pas.

Or, si les habitants de M ne connaissent pas G et le modèle étendu est obtenu de G, comment peuvent ils savoir que se passe-t-il dans M'? Pour les raisons expliquées au debut du chapitre, on ne peut pas se placer dans l'univers $\mathscr{U}$ pour démontrer que M' satisfait les énoncés qu'on veut : cela voudrait dir démontrer dans ZF leur relativisation. Pour voir quelles sont les propriétés satisfaites par M' alors, il faut se placer dedans M. Nous sommes donc, comme des habitants de M. Mais, alors, comment peut on connaitre quels sont les énoncés vrais pour M'? La solution consiste à construire M' de façon que la verité ou la fausseté des assertion sur M' soit décidable *dans* M, même si M' n'en est pas un sousmodèle. Afin que cela soit possible, on construit M' de façon que ses éléments aient des *noms* dans M.

Les Définitions 1.4.1,1.4.2 et 1.4.3 qui suivent, définissent M'.

Définition 1.4.1 *Un ensemble $\tau \in M$ est un C-*nom *ssi τ est un ensemble de paires ordonnées (σ, p) tels que σ est un C-nom et $p \in C$.*

On note M^C la classe des C-noms.
On définit, en suite, une c-fonction $val : M^C \to \mathscr{U}$, la fonction qui associe à chaque C-nom l'objet correspondant de M'.

Définition 1.4.2 *Soit $\tau \in M^C$ $val(\tau) = \{val(\sigma); \exists p \in G((\sigma, p) \in \tau)\}$.*

Enfin, on pose M' ègale à la classe $M[G]$ ainsi définie :

Définition 1.4.3 $M[G] = \{val(\tau); \tau$ *est un C-nom*$\}$.

Autrement, $M[G]$ est l'image de la fonction val.

La fonction val "décodifie" de chaque $C - nom$, seulement les couples qui ont comme deuxième composante *une condition qui est dans* G. Cette construction donc, reflet le procédé de formation de nouveaux ensembles à partir de G, qu'on vient de présenter : $M[G]$ est effectivement obtenu du filtre générique.

Pour voir si un certain ensemble est dans M' il suffit, alors, de voir s'il a un C-nom dans M. Si notre construction est correcte, donc, on devrait pouvoir démontrer que chaque ensemble de M a un nom. En démontrant ce résultat on démontrera que $M \subseteq M'$.

Proposition 1.4.4 $M \subseteq M[G]$.

Preuve. On suppose que C ait un minimum 1. Il n'est pas nécessaire qu'il y ait dans C un tel élément mais son existance nous permet de démontrer ce resultat et d'autre, plus facilement. On définit pour chaque $x \in M$, un C-nom $\hat{x} = \{(1, \hat{y}); y \in x\}$. Il est clair que pour tout $x \in M$, $val(\hat{x}) = x$. Donc, puisque $M[G]$ est l'image de la fonction val, on a $x \in M[G]$. ■

On voulait, en plus, que G était dans M'. On vérifie alors :

Proposition 1.4.5 $G \in M[G]$.

Preuve. Soit $\Gamma = \{(p, \hat{p}); p \in C\}$. On a $val(\Gamma) = \{val(\hat{p}); p \in G\} = \{p; p \in G\} = G$. ■

En revanche, en générale, $G \notin M$. On va montrer, en fait, que $G \in M$ ssi G contient un élément p_0 de C tel que tous ses majeurants sont deux à deux compatibles. Un tel ensemble p_0 est appelé *atome*. Les ensembles de condition que nous considérérons n'auront en générale aucun atome dans ses filtres génériques. Ici dés-sous vous trouvez la démonstration de l'équivalence précédente mais, d'abord, on va montrer un lemme :

Lemme 1.4.6 *Soit $p \in C$, on a $p \notin G$ ssi p est incompatible avec un élément de G.*

Preuve. La condition est suffisante d'après la définition de filtre. Inversement, si $p \notin G$ alors soit $D = \{q \in C; p \leq q \vee q \perp p\}$. On voit facilement que $D \in M$ et que D est un ensemble dense. Alors soit $p \in D \cap G$, si $p \leq q$ alors $p \in G$, contradition. Donc $q \perp p$. ■

Proposition 1.4.7 *$G \in M$ ssi il existe un atome $p_0 \in C$ tel que $p_0 \in G$. On a alors $G = \{p \in C; p//p_0\}$.*

Preuve. ($\Leftarrow$) Soit p_0 un atome tel que $p_0 \in G$. On va montrer que $G = \{p \in C; p//p_0\}$, ce qui implique $G \in M$. D'abord on montre $G \subseteq \{p \in C; p//p_0\}$: soit $p \in G$, alors puisque $p_0 \in G$, on a $p//p_0$. Inversement, soit $p \in \{p \in C; p//p_0\}$. Par le Lemme 1.4.6 si $p \notin G$ alos il existe $q \in G$ tel que $p \perp q$. Mais $p//p_0$ et $p_0//q$, donc il existe $r \geq p, p_0$ et $s \geq p_0, q$. Puisque p est un atome alors $r//s$, donc $p//q$. Contradition.
($\Rightarrow$)Soit $X = C - G$. Par hypothèse $G \in M$ donc $X \in M$. Mais $G \cap X = \emptyset$, donc X n'est pas dense. C'est à dire il existe $p_0 \in C$ qui n'a pas de majeurants dans X. Par suite tous les majeurants de p_0 sont dans G et donc ils sont tous compatibles. ■

On peut dejà verifier que $M[G]$ satisfait certains axiomes de ZF.

Osservation 1.4.8 *$M[G]$ est transitif (car $M[G]$ est l'image de la fonction val).*

Théorème 1.4.9 *$M[G]$ satisfait les axiomes d'extensionalité et fondation.*

Preuve. Conséquence de l'Observation 1.4.8. ∎

Lemme 1.4.10 $On \cap M[G] = On \cap M$.

Preuve. On montre d'abord que $\forall x \in M,\ rg(val(x)) \leq rg(x)$: soit $x \in M$ de rang minimum tel que $rg(val(x)) > rg(x)$, s'il en existe. On a $val(x) = \{val(y); \exists p \in G((y,p) \in x)\}$. Il est évident que pour tout y pour lequel il existe $p \in G$ tel que $(y,p) \in x$, on a $rg(y) < rg(x)$, donc $rg(val(y)) \leq rg(y)$. Alors tout élément $val(y)$ de $val(x)$ a rang strictément inférieur à $rg(x)$, d'où $rg(val(x)) \leq rg(x)$, ce qui contredit l'hypothèse.
Soit alors α un ordinal de $M[G]$. Il existe $x \in M$ tel que $val(x) = \alpha$. Mais $\alpha < rg(\alpha) \leq rg(x) \in M$, donc $\alpha \in M$. ∎

Théorème 1.4.11 *$M[G]$ satisfait l'axiome de l'infini.*

Preuve. Conséquence de la transitivité de $M[G]$ et du Lemme 1.4.10 : M satisfait l'axiome de l'infini, donc $\omega \in M$, d'où $w \in M[G]$, c'est à dire $M[G]$ satisfait l'axiome de l'infini. ∎

Théorème 1.4.12 *$M[G]$ satisfait l'axiome de la Réunion.*

Preuve. Soit $val(a) \in M[G]$, on veut montrer $\exists b \in M$ t.q. $val(b) = \bigcup val(a)$. On pose $b = \{(y,r); y \in M, r \in C, \exists p,q(r \leq p,q)(\exists x \in M)[(x,p) \in a \wedge (y,q) \in x]\}$. On a $b \in M$, on va montrer $val(b) = \bigcup val(a)$. Soit $val(v) \in val(b)$. Il existe $r \in G$ t.q. $(v,r) \in b$. Par définition de b, $\exists p,q \leq r$ (donc $p,q \in G$) et $x \in M$ t.q. $(x,p) \in a$ et $(v,q) \in x$. On a alors $val(x) \in val(a)$ et $val(v) \in val(x)$, soit $val(v) \in \bigcup val(a)$.
Viceversa soit $val(v) \in \bigcup val(a)$. Il existe $u \in M$ t.q. $val(u) \in val(a)$ et $val(v) \in val(u)$. Il existe alors $q \in G$ t.q. $(u,q) \in a$. Mais $val(v) \in val(u)$, donc $\exists q \in G$ t.q. $(v,q) \in u$. Soit $r \in G$ un majeurant pour p et q. Par définition de b on a $(v,r) \in b$. Puisque $r \in G$, alors $val(v) \in val(b)$. ∎

1.5 Le langage de Forcing.

En introduisant les C-noms, on a creé la possibilité de savoir si des éléments appartiennent ou n'appartiennent pas à $M[G]$, même en restant dedans M. Plus explicitement, ce qu'on est en train fair, est construire un *langage* pour les habitants de M, c'est à dire un langage dont chaque énoncé exprime une propriété de $M[G]$ et, qui soit pourtant perfetement compréhensible à ces qui vivent dans M. On définit donc, le *Langage de Forcing* $\mathscr{L}_f$.

$$\mathscr{L}_f = \mathscr{L} \cup \{\underline{\tau}^{<0>}; \tau \in M^C\}.$$

On vient de dire que les énoncés de $\mathscr{L}_f$ doivent exprimer des propriétes de $M[G]$. Il faut, donc, définir pour chaque symbole non logique de $\mathscr{L}_f$, son interprétation dans $M[G]$. On pose alors :

$$\in^{M[G]} = \in \ ; \ \underline{\tau}^{M[G]} = val(\tau).$$

Or, l'idée sur laquelle notre construction est fondé est que $p \Vdash X$ signifie que si G est un filtre générique et $p \in G$, alors X est une propriété vraie dans le modèle étendu. Dans l'Exemple 1.2.1, en fait : $p \Vdash n \in a$ si $p(n) = 1$; cela veut dire que si $p \in G$, alors $f(n) = 1$, donc $n \in a$.
Enfin, on peut formaliser la définition du symbole $\Vdash$, qui se lit "force".

Définition 1.5.1 *Soit* $\varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \in En(\mathscr{L}_f)$, *on dit que* p force $\varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, *et on l'écrit* $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ *ssi, pour tout filtre générique* G *tel que* $p \in G$, *on a* $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$.

Il est immédiat de la définition que :
$\exists p \in G(p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)) \implies M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Mais on veut un peut plus : étant donnée un énoncé φ de $\mathscr{L}_f$, on veut savoir si il est vrai dans $M[G]$ où pas. On montrera, alors que :

Théorème 1.5.2 *(Lemme de Verité)*
Soit $\varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \in En(\mathscr{L}_f)$ *et soit* G *un filtre générique,*

$$M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \ ssi \ \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)).$$

Pour démontrer le Lemme de Vérité il est nécéssaire montrer que la rélation de forcing est *définissable dans M*. En effet, la Définition 1.5.1 est une définition de $\Vdash$ dans $\mathscr{U}$ et non pas dans M, car on a utilisé G dans cette définition. Par contre on veut qu'il soit possible de décider *dedans* M si une certain condition p force un énoncé φ, pour établir finalement si φ est vrai dans $M[G]$. Autrement, il faut démontrer le théorème suivante :

Théorème 1.5.3 *Pour chaque formule* $\varphi(x_1, ..., x_n)$ *de* $\mathscr{L}$, *il existe une formule* $\theta(y, z, x_1, ..., x_n)$ *de* $\mathscr{L}$ *telle que pour tout ordre partiel* $C \in M$, *pour tout* $\sigma_1, ..., \sigma_n \in M^C$ *et pour tout* $p \in C$ *on a :* $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ *ssi* $(\theta(p, C, \sigma_1, ..., \sigma_n))^M$.

Il s'agit de la définissabilité du forcing. La démonstration des deux théorèmes précedants occupera toute la dernière partie de ce chapitre. Pour l'instant on se limitera à assumer que ces résultats soit vrais.

Or, il serait bien de faire quelque remarque sur la définition du forcing. Au début de cette exposition on a dit que le comportement de $\Vdash$ est analogue à celui de $\models \Box$. On devrait alors pouvoir démontrer de la définition (et on peut le fair) que :

Proposition 1.5.4 *Soient p et q deux conditions de forcing quelconques.*
$p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \wedge p \leq q \Longrightarrow q \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$.

Preuve. Soit G un filtre générique tel que $q \in G$. Puisque $p \leq q$, alors $p \in G$. Mais $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, donc $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. On en conclu $q \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. ■

1.6 ZFC dans M[G].

Théorème 1.6.1 *$M[G]$ est un modèle de ZF.*

Preuve. *Axiome de l'ensemble des parties :*
Soit $val(a) \in M[G]$. On pose $a' = \{(x,p); p \in C, \exists q \leq p((x,q) \in a)\}$, et $b = (\mathscr{P}(a'))^M \times C$. On montre $val(b) = \mathscr{P}(val(a))^{M[G]}$. En effet soit $val(u) \in val(b)$; il existe $r \in G$ t.q. $(u,r) \in b$. Par définition de b on a donc $u \subseteq a'$. On montre $val(u) \subseteq val(a)$. Soit $val(x) \in val(u)$, il existe $p \in G$ t.q $(x,p) \in u \subseteq a'$. Donc $\exists q(p \leq q \wedge (x,q) \in a)$, mais $q \in G$, donc $val(x) \in val(a)$.
Viceversa, soit $val(u) \subseteq^{M[G]} val(a)$. On pose $v = \{(x,p) \in a'; p \Vdash \underline{x} \in u\}$. Puisque $v \subseteq a'$, alors $\forall p \in C(v,p) \in b$.

Il en resulte que $val(v) \in val(b)$. On montre $val(u) = val(v)$, d'où $val(u) \in val(b)$. Soit $val(y) \in val(v)$; il existe $p \in G$ t.q. $(y,p) \in v$. Par définition de v on a $p \Vdash \underline{y} \in \underline{u}$. Donc $val(y) \in val(u)$ (lemme de vérité).
Viceversa soit $val(y) \in val(u)$. Comme $val(u) \subseteq val(a)$, on a $val(y) \in val(a)$. Mais alors $\exists q \in G((y,q) \in a)$. Par ailleurs, on a $val(y) \in val(a)$ et (lemme de vérité) il existe $r \in G$ t.q. $r \Vdash \underline{y} \in \underline{u}$. Soit $p \in G$ t.q. $q, r \leq p$, on a $(y,p) \in a'$ et $p \Vdash \underline{y} \in \underline{u}$. Par définition de v donc, $(y,p) \in v$ et $p \in G$. Donc $val(y) \in val(v)$.

Schema d'axiomes de remplacement :
Soient $val(a) \in M[G]$, et $\varphi(x, y, val(a_1), ..., val(a_k))$ un enoncé à paramètres dans $M[G]$ qui intérprété dans $M[G]$ définit une rélation fonctionnelle. Il existe dans l'univers l'ensemble des images des éléments de $val(a)$ par cette relaction : on l'appelle B. On cherche $b \in M$ tel que $val(b) = B$. Pour chaque $u \in M$ et $p \in C$, soit $F(u,p)$

l'ensemble des $v \in M$ de rang minimum tels que $p \Vdash \varphi(\underline{u}, \underline{v}, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$. F est dans M une relation fonctionnelle à deux arguments. On pose alors $b = \{(v,p); v \in M, p \in C, \exists u \exists q (p \leq q \wedge (u,q) \in a \wedge v \in F(u,p))\}$; b est un ensemble de M.

Soit $val(v_0) \in val(b)$; et $\exists p \in G$ tel que $(v_0, p) \in b$. Par définition de b, il existe $u \in M$, et q t.q. $p \leq q$ et $(u,q) \in a$ et $v_0 \in F(u,p)$. Puisque $(u,q) \in a$ et $q \in G$, alors $val(u) \in val(a)$.
D'autre part, comme $v_0 \in F(u,p)$, on a $p \Vdash \varphi(\underline{u}, \underline{v}_0, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$, par définition de F. Donc (lemme de vérité) $M[G] \models \varphi(\underline{u}, \underline{v}, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$. Comme $val(u) \in val(a)$, on voit que $val(v_0) \in B$.

Inversement, soit $val(t) \in B$:
il existe $val(u_0) \in val(a)$ tel que $M[G] \models \varphi(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$. Comme $val(u_0) \in val(a)$, alors il existe $q \in G$ tel que $(u_o, q) \in a$. D'autre part, $M[G] \models \varphi(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$ il existe donc $r \in G$ tel que $r \Vdash \varphi(\underline{u}_0, \underline{t}, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$. Soit $p \in G$ tel que $q, r \leq p$; on a $p \Vdash \varphi(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$ ce qui montre $F(u_0, p) \neq \emptyset$.
Soit $v \in F(u_0, p)$; on a $(u_0, q) \in a$ et $q \leq p$. Ce qui montre par définition de b, que $(v,p) \in b$. Mais $p \in G$ donc $val(v) \in val(b)$. Mais $v \in F(u_0, p)$, donc $p \Vdash \varphi(\underline{u}_0, \underline{v}, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$. D'où $M[G] \models \varphi(\underline{u}_0, \underline{v}, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$. On avait $M[G] \models \varphi(\underline{u}_0, \underline{t}, \underline{a}_1, ..., \underline{a}_k)$, comme il s'agit d'une rélation fonctionnelle dans $M[G]$ alors, $val(v) = val(t)$; or, $val(v) \in val(b)$ donc $val(t) \in val(b)$. ■

Théorème 1.6.2 *Si M satisfait l'axiome du choix, il en est de même pour $M[G]$.*

Preuve. Soit $val(a) \in M[G]$. Il suffit de trouver, dans $M[G]$ une surjection d'un ordinal sur un ensemble qui contient $val(a)$. On pose $b = Ct(a)$; d'après l'axiome du choix dans M, il existe dans M une surjection $f : \alpha \to b$, où α est un ordinal de M. Soit $\psi = val[b]$, c'est à dire la restriction de la fonction val à l'ensemble b. On a $\psi \in M[G]$. Par ailleur, $val(a) \subseteq Im(\psi)$: en effet si $val(u) \in val(a)$ alors il existe $p \in G$ tel que $(u,p) \in a$; alors $u \in Ct(a)$, soit $u \in dom(\psi)$ et $\psi(u) = val(u)$. Donc $val(u) \in Im(\psi)$.
Comme f est surjective de α sur b, on voit que $\psi \circ f$ est une surjection de α sur $Im(\psi)$ dont a est un sousensemble. ■

1.7 Définissabilité du forcing.

La définition que nous avons donné de $\Vdash$ présuppose la connaissance des filtres génériques, mais nous avons expliqué que M ne les connait pas. Pourtant, la relation de forcing a été introduite de façon que ces qui vivent dans M puissent établir, en regardant les conditions de forcing, quelles sont les énoncés vrais dans les extensions génériques.

Dans cette section on s'occupera de montrer que pour tout formule $\varphi(x_1, ..., x_n)$, pour tout $\sigma_1, ..., \sigma_n \in M^C$ et pour tout $p \in C$ telle que $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, il existe un énoncé à parametres dans M, on le note $p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, tel que $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ ssi $M \models p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$.

Il faut s'assurer que $p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ soit bien définit *dans* M. Une fois que cela aura été fait, on aura montré que dans M on peut decider la verité ou falsité des propositions sur les extensions génériques.

Avant de définir l'énoncé en question, on va introduire la notion d' ensemble dense en dessus d'une condition.

Définition 1.7.1 *Soient C un ensemble de conditions de forcing, D un ensemble et $p \in C$. On dit que D est* dense en dessus de p *ssi pour tout $q \geq p$ il existe $r \geq q$ tel que $r \in D$.*

Lemme 1.7.2 *Soit G un filtre générique et soient D un ensemble et $p \in G$. Si D est dense en dessus de p alors $D \cap G \neq \emptyset$.*

Preuve. Soit $E = \{q, q \perp p \vee q \in D\}$. On va montrer que E est dense. Soit $r \in C$, deux sont les cas possibles : $r \perp p$ ou $r // p$. Si $r \perp p$ alors $r \in E$, sinon il existe $s \geq p, r$. Puisque D est dense en dessus de p, alors il existe $q \geq s$ tel que $q \in D$, donc $q \in E$. Or, si E est dense alors $E \cap G \neq \emptyset$. Soit, donc, $x \in E \cap G$: on a $p, x \in G$ donc $p // x$. Mais $x \in E$ donc, necessairement, $x \in D$. On a montré $D \cap G \neq \emptyset$. ■

La partie la plus difficile de la définition de $p \Vdash \varphi(\underline{\tau}_1, ..., \underline{\tau}_n)$ dans M, sera quand φ est une égalité. Supposons qu' on veut savoir si une condition p force $\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2$. On sait par la Définition 1.5.1 que $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ ssi pour tout filtre génér. G tels que $p \in G$, $M[G] \models \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2$, c'est à dire $val(\tau_1) \subseteq val(\tau_2)$ et $val(\tau_2) \subseteq val(\tau_1)$. Pour savoir si, par exemple, $val(\tau_1) \subseteq val(\tau_2)$ on prend $(\pi_1, r_1) \in \tau_1$: si $r_1 \in G$ alors $val(\pi_1) \in val(\tau_1)$, donc il faut qu'il y ait un $(\pi_2, r_2) \in \tau_2$ tel que $r_2 \in G$ et $val(\pi_1) = val(\pi_2)$. La question, donc, revient à savoir si $M[G] \models \underline{\pi}_1 = \underline{\pi}_2$.

Mais nous sommes dans M donc, comment peut on savoir si $M[G] \models \underline{\pi}_1 = \underline{\pi}_2$, si $r_1 \in G$ et si $r_2 \in G$? Supposons qu'il y ait un $q \in G$ tel que $q \geq r_1, r_2$ et $q \Vdash \underline{\pi}_1 = \underline{\pi}_2$. Alors de $q \geq r_1, r_2$ on peut déduir que $r_1, r_2 \in G$. En resumant, pour savoir si p force $\tau_1 \subseteq \tau_2$ il faudrait que pour tout $(\pi_1, r_1) \in \tau_1$ il existe $q \in G$ tel que si $q \geq r_1$ (i.e. $r_1 \in G$), alors il existe $(\pi_2, r_2) \in \tau_2$ tel que $q \geq s$ (i.e. $r_2 \in G$) et $q \Vdash \underline{\pi}_1 = \underline{\pi}_2$.

Mais le problème est, encore une fois, qu'on ne sait pas quelles conditions sont dans G. il suffit, pourtant, que pour tout $(\pi_1, r_1) \in \tau_1$ l'ensemble $\{q, q \geq r_1 \Rightarrow \exists(\pi_2, r_2) \in \tau_2(q \geq r_2 \wedge q \Vdash \underline{\pi_1} = \underline{\pi_2})\}$ soit dense en dessus de p, car si c'est le cas le Lemme 1.7.2 nous permet d'affirmer qu'il contient un $q \in G$.

On introduit, alors, l'abbreviation $p \Vdash^* \underline{\sigma_1} \subseteq \underline{\sigma_2}$ pour l'énoncé : pour tout $(\pi_1, r_1) \in \sigma_1$, l'ensemble $\{q \geq p, q \geq r \Rightarrow \exists(\pi_2, r_2) \in \sigma_2(q \geq r_2 \wedge q \Vdash^* \underline{\pi_1} = \underline{\pi_2})\}$ est dense en dessus de p.

On peut, enfin, énoncer la définition de $p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$.

Définition 1.7.3 *Soient $p \in C$, $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une formule et $\sigma_1, ..., \sigma_n \in M^C$.*
(a) $p \Vdash^* \underline{\sigma_1} = \underline{\sigma_n}$ ssi, $p \Vdash^* \underline{\sigma_1} \subseteq \underline{\sigma_2}$ et $p \Vdash^* \underline{\sigma_2} \subseteq \underline{\sigma_1}$;
(b) $p \Vdash^* \underline{\sigma_1} \in \underline{\sigma_2}$ ssi
$\{q, \exists(\pi, s) \in \sigma_2(q \geq s \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma_1)\}$ est dense en dessus de p ;
(c) $p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}) \wedge \psi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ ssi $p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ et $p \Vdash^* \psi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$;
(d) $p \Vdash^* \neg\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ ssi $\neg\exists q \geq p(q \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))$;
(e) $p \Vdash^* \exists x\varphi(x, \underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ ssi
$\{r; \exists\sigma \in M^C(r \Vdash^* \varphi(\sigma, \underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))\}$ est dense en dessus de p.

Il s'agit d'une définition par recurrence. La recurrence est double : (a) et (b) définissent $p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ quand φ est atomique, par recurrence sur la relation $<_{at}$ ainsi définie.

Définition 1.7.4 *Soient $\rho, \rho' \in \{=, \in\}$.*
Pour tout $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in M^C$, $\sigma_1\ \rho\ \sigma_2\ <_{at}\ \tau_1\ \rho'\ \tau_2$ ssi
$max\{rg(\sigma_1), rg(\sigma_2)\} < max\{rg(\tau_1), rg(\tau_2)\}$, ou bien
$max\{rg(\sigma_1), rg(\sigma_2)\} = max\{rg(\tau_1), rg(\tau_2)\}$ et $min\{rg(\sigma_1), rg(\sigma_2)\} < min\{rg(\tau_1), rg(\tau_2)\}$.

Une fois que $p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ est défini pour φ atomique, $(c)(d)(e)$ completent la définition, par récurrence sur la complexité de la formule. On est en train de définir, pour tout formule $\varphi(x_1, ..., x_n)$, une formule $Force^*_\varphi(p, \sigma_1, ..., \sigma_n, C, \leq)$.

Comme pour $\Vdash$ on peut montrer :

Lemme 1.7.5 *Soit $\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}) \in En(\mathscr{L}_f)$ et soient p, q deux conditions de forcing. Si $p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ et $q \geq p$, alors $q \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$.*

Preuve. Consequence du fait que si un ensemble D est dense en dessus de p et $r \geq p$ alors D est dense en dessus de r. La démonstration du lemme est obtenue par recurrence. ■

On va montrer maintenante que, pour tout filtre générique G, et pour tout $\varphi \in En(\mathscr{L}_f)$, on a $M[G] \models \varphi$ ssi $\exists p \in G(p \Vdash^* \varphi)^M$. Ce resultat est le coeur de la démonstration d'équivalence entre $p \Vdash \varphi(\underline{\tau_1}, ..., \underline{\tau_n})$ et $(p \Vdash^* \varphi(\underline{\tau_1}, ..., \underline{\tau_n}))^M$.

Théorème 1.7.6 *Soit $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une formule, soient C un ensemble de conditions de forcing, G un filtre C-générique sur M et $\tau_1, ..., \tau_n \in M^C$; pout tou $p \in C$, $\exists p \in G(p \Vdash^* \varphi(\underline{\tau}_1, ..., \underline{\tau}_n))^M \iff M[G] \models \varphi(\underline{\tau}_1, ..., \underline{\tau}_n))$.*

Preuve. Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ est $x_1 = x_2$.
($\Longrightarrow$) On suppose $p \in G$ et $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. IL faut montrer $val(\tau_1) \subseteq val(\tau_2)$ et $val(\tau_2) \subseteq val(\tau_1)$. On va montrer $val(\tau_1) \subseteq val(\tau_2)$, la démonstration de l'autre inclusion est symmetrique. Soit $val(\pi_1) \in val(\tau_1)$, il existe $s_1 \in G$ tel que $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$. On va montrer $val(\pi_1) \in val(\tau_2)$. Soit $r \in G$ tel que $r \geq s_1, p$ par le Lemme 1.7.5 on a $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Par le Lemme 1.7.2 il y a un $q \in G$ tel que $q \geq r$ et si $q \geq s_1$ alors $\exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2(q \geq s_2 \wedge q \Vdash^* \underline{\pi}_1 = \underline{\pi}_2)$. Mais $q \geq s_1$ donc soit $(\pi_2, s_2) \in \tau_2(q \geq s_2 \wedge q \Vdash^* \underline{\pi}_1 = \underline{\pi}_2)$, on a $s_2 \in G$ donc $val(\pi_2) \in val(\tau_2)$. Par hypothèse de recurrence $p \Vdash^* \underline{\pi}_1 = \underline{\pi}_2$ implique $val(\pi_1) = val(\pi_2)$, donc $val(\pi_1) \in val(\tau_2)$.
($\Longleftarrow$) On suppose $val(\tau_1) = val(\tau_2)$. Soit $D = \{r; r \Vdash^* \underline{\tau}_1 \subseteq \underline{\tau}_2 \vee \exists(s, \pi) \in \tau_1(r \geq s \wedge r \Vdash^* \pi \notin \tau_2)\}$. D est un ensemble dense de M. Soit, donc, $r \in D \cap G$, si $r \nVdash^* \underline{\tau}_1 \subseteq \underline{\tau}_2$, alors il existe $(\pi, s) \in \tau_1$ tel que $r \geq s$ et $r \Vdash^* \underline{\pi} \notin \underline{\tau}_2$. Mais $r \in G$ donc $s \in G$ et alors $val(\pi) \in val(\tau_1)$ donc $val(\pi) \in val(\tau_2)$. Alors $M[G] \models \pi \in \tau_2$ donc, par hypothèse de recurrence, il existe $q \in G$ telle que $q \Vdash^* \underline{\pi} \in \underline{\tau}_2$, ce qui contradit $r \Vdash^* \underline{\pi} \notin \underline{\tau}_2$. Donc, il existe $\overline{r} \in G$ tel que $\overline{r} \Vdash^* \underline{\tau}_1 \subseteq \underline{\tau}_2$ et analogament il existe $\overline{s} \in G$ tel que $\overline{s} \Vdash^* \underline{\tau}_2 \subseteq \underline{\tau}_1$. Soit alors $p \in G$ tel que $p \geq \overline{r}, \overline{s}$. On a $p \Vdash^* \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2$.

Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ est $x_1 \in x_2$.
($\Longrightarrow$) Soit $p \in G$ tel que $p \Vdash^* \underline{\tau}_1 \in \underline{\tau}_n$. Soit $D = \{q; \exists(\pi, s) \in \tau_2(q \geq s \wedge q \Vdash^* \underline{\pi} = \underline{\tau}_1)\}$. L'ensemble D est dense en dessus de p, soit, donc $q \in D \cap G$ et soit $(\pi, s) \in \tau_2(q \geq s \wedge q \Vdash^* \underline{\pi} = \underline{\tau}_1)$. Puisque $s \in G$ alors $val(\pi) \in val(\tau_2)$. Mais, par hypothèse de recurrence, $val(\pi) = val(\tau_1)$ donc $val(\tau_1) \in val(\tau_2)$.
($\Longleftarrow$) On suppose $val(\tau_1) \in val(\tau_2)$. Alors il existe $(\pi, s) \in \tau_2$ tel que $s \in G$ et $val(\pi) = val(\tau_1)$. Par hypothèse de recurrence il existe $r \in G$ tel que $r \Vdash^* \underline{\pi} = \underline{\tau}_1$. Soit $p \in G$ tel que $p \geq r, s$. Alors pour tout $q \geq p(q \geq s \wedge q \Vdash^* \underline{\pi} = \underline{\tau}_1)$, ce qui implique $p \Vdash^* \underline{\tau}_1 \in \underline{\tau}_2$.

Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ est une négation.
($\Longrightarrow$) Soit $p \in G$ tel que $(p \Vdash^* \neg\phi)^M$ Si par absurde $M[G] \models \phi$ alors par hypothèse de recurrence il existe $q \in G$ tel que $(q \Vdash^* \phi)^M$. Soit $r \geq p, q$ alors $(r \Vdash^* \phi)^M$ ce qui contradit $p \Vdash^* \neg\phi$.
($\Longleftarrow$) On suppose $M[G] \models \neg\phi$. Soit $D = \{p; (p \Vdash^* \neg\phi)^M \vee (p \Vdash^* \phi)^M\}$. L'ensemble D est dense donc, soit $p \in D \cap G$. Si $(p \Vdash^* \phi)^M$, alors par hypothèse de recurrence $M[G] \models \phi$. Contradition.

Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ est une conjonction.
($\Longrightarrow$) On suppose $\exists p \in G$ tel que $(p \Vdash^* \phi \wedge \psi)^M$ ssi, $(p \Vdash^* \phi)^M$ et $(p \Vdash^* \psi)^M$, ce qui

implique (par hypothèse de recurrence) $M[G] \models \phi$ et $M[G] \models \psi$ ssi, $M[G] \models \phi \wedge \psi$.
$(\Longleftarrow)$ On suppose $M[G] \models \phi$ et $M[G] \models \psi$. Par hypothèse de recurrence il existe $r, q \in G$ tels que $(r \Vdash^* \phi)^M$ et $(q \Vdash^* \psi)^M$. Soit $p \geq q, r$, tel que $p \in G$ on a $p \Vdash^* \phi \wedge \psi$.

Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ est un existentiel.
$(\Longrightarrow)$ Soit $p \in G$ tel que $(p \Vdash^* \exists x \phi(x))^M$; alors $\{r; \exists \sigma \in M^C (r \Vdash^* \phi(\sigma))^M\}$ est dense en dessus de p. Soit alors $r \in G$ tel que $(r \Vdash^* \phi(\sigma))^M$. par hypothèse de recurrence $M[G] \models \phi(x)[\sigma]$ donc, $M[G] \models \exists x \phi(x)$.
$(\Longleftarrow)$ Soit $\sigma \in M^C$ tel que $M[G] \models \phi(\sigma)$. Par hypothèse de recurrence il existe $p \in G$ tel que $(p \Vdash^* \phi(\sigma))^M$. Pour tout $r \geq p$ on a $(r \Vdash^* \phi(\sigma))^M$, donc $(p \Vdash^* \exists x \phi(x))^M$. ■

Théorème 1.7.7 *Soient $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une formule, C un ensemble de conditions et $\sigma_1, ..., \sigma_n \in M^C$. Pour tout $p \in C$, $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}) \Longleftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M$.*

Preuve. $(\Longleftarrow)$ On suppose $(p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M$. Soit G un filtre générique tel que $p \in G$. Par le Théoreme , on a $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$. On a montré, donc, $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$.
$(\Longrightarrow)$On suppose $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$. Soit $D = \{r; (r \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M\}$. On va montrer que D est dense en dessus de p : Si par absurde il existe $q \geq p$ tel que $\neg r \geq q (r \in D)$, alors $(q \Vdash^* \neg\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M$. Mais on a montré que alors $q \Vdash \neg\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$. Soit G un filtre générique tel que $q \in G$. On a $M[G] \models \neg\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$. Mais puisque $q \geq p$ alors $p \in G$ donc $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$. Contradiction.
On va montrer, maintenant, par recurrence sur la complexité de $\varphi(x_1, ..., x_n)$ que $(p \Vdash^* \varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M$.
Si $\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ est $\underline{\sigma_1} = \underline{\sigma_2}$,
alors puisque D est dense en dessus de p, alors $\forall q \geq p \exists r \geq q \forall (\pi_1, s_1) \in \tau_1 \exists s \geq r (s \geq s_1) \Rightarrow \exists (\pi_2, s_2) \in \tau_2 (s \geq s_2 \wedge (s \Vdash^* \underline{\pi_1} = \underline{\pi_2})^M)$. Mais alors $\forall (\pi_1, s_1) \in \tau_1 \forall q \geq p \exists s \geq q (s \geq s_1) \Rightarrow \exists (\pi_2, s_2) \in \tau_2 (s \geq s_2 \wedge (s \Vdash^* \underline{\pi_1} = \underline{\pi_2})^M)$. Donc $(p \Vdash^* \underline{\sigma_1} \subseteq \underline{\sigma_2})^M$. Analogament $(p \Vdash^* \underline{\sigma_2} \subseteq \underline{\sigma_1})^M$, donc $(p \Vdash^* \underline{\sigma_1} = \underline{\sigma_2})^M$.
Si $\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ est $\underline{\sigma_1} \in \underline{\sigma_2}$,
alors, puisque D est dense en dessus de p, on a $\forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* \underline{\sigma_1} \in \underline{\sigma_2})^M$. Donc $\forall q \geq p \exists r \geq q \exists s \geq r \exists (\pi, t) \in \sigma_2$ tel que $s \geq r$ et $(s \Vdash^* \underline{\pi} = \underline{\sigma_1})^M$. Mais alors $\{s; \exists (\pi, t) \in \sigma_2 (s \geq t \wedge (s \Vdash^* \underline{\pi} = \underline{\sigma_1})^M)\}$ est dense en dessus de p. Donc $(p \Vdash^* \underline{\sigma_1} \in \underline{\sigma_2})^M$.
Si $\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ est $\phi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}) \wedge \psi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$,
alors puisque D est dense en dessus de p, $\{r; (r \Vdash^* \phi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M et (r \Vdash^* \psi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M\}$ l'est également. Par hypothèse de recurrence alors $(p \Vdash^* \phi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M$ et $(p \Vdash^* \psi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M$. Donc $(p \Vdash^* \phi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}) \wedge \psi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M$.
Si $\varphi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$ est $\neg\phi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n})$,
alors si par absurde il existe $q \geq p (q \Vdash^* \neg\phi(\underline{\sigma_1}, ..., \underline{\sigma_n}))^M$, puisque D est dense

en dessus de p, il existe un $r \geq q(r \Vdash^* \neg\phi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n))^M$. Mais $r \geq q$ donc $(r \Vdash^* \phi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n))^M$. Contradition.
Si $\varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ est $\exists x\phi(x, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$,
alors puisque D est dense en dessus de p, l'ensemble $\{s; \exists\sigma \in M^C(s \Vdash^* \phi(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n))^M\}$ l'est également. Donc $(p \Vdash^* \exists x\phi(x, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n))^M$. ■

Théorème 1.7.8 *(Lemme de Verité) Soit* $\varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \in En(\mathscr{L}_f)$ *et soit* G *un filtre générique,* $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ *ssi* $\exists p \in G(p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n))$.

Preuve. Consequence des Théorèmes 1.7 et 1.7.7. ■

1.8 Forcing et connecteurs logiques

Dans cette section on va expliciter la définition de forcing pour les connecteurs logiques.

Proposition 1.8.1 *Soient* C *un ensemble de conditions de forcing et* $p, q \in C$.
(a) $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \wedge \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ *et* $p \Vdash \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$
(b) $p \Vdash \neg\varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \Longleftrightarrow \forall q(p \leq q \Rightarrow q \nVdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n))$;
(c) $p \Vdash \forall x\varphi(x, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \Longleftrightarrow \forall\sigma \in M^C(p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n))$.

Preuve. (a) $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \wedge p \Vdash \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ ssi pour tout filtre générique G tel que $p \in G$, $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \wedge \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$; ssi $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ et $M[G] \models \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$; ssi $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ et $p \Vdash \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$.
(b) ($\Longrightarrow$) Supposons qu'il existe $q \in C$ telle que $p \leq q$ et $q \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Alors pour tout filtre génér. G qui contient q, $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Mais puisque $p \leq q$ alors $p \in G$, donc $p \nVdash \neg\varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ car sinon $M[G] \models \neg\varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$.
($\Longleftarrow$) Soit G un filtre gén. tel que $p \in G$, si par absurde $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, alors par le Lemme de Vérité, il existe $r \in G$ tel que $r \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Soit $q \in G$ tel que $p, r \leq q$ (il existe par la Prop. 1.2.6), on a $q \nVdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ mais aussi, $q \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ car $r \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Contradition.
(c) ($\Longrightarrow$) Si il existe $\sigma \in M^C$ tel que $p \nVdash \varphi(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, alors il existe un filtre générique G tel que $p \in G$ et $M[G] \models \neg\varphi(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Mais $p \Vdash \forall x\varphi(x, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, donc $M[G] \models \forall x\varphi(x, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Contradiction.
($\Longleftarrow$) Si $p \nVdash \forall x\varphi(x, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, alors il existe un filtre générique G qui contient p et tel que $M[G] \models \exists x\neg\varphi(x, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Alors il existe $\sigma \in M^C$ tel que $M[G] \models \neg\varphi(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Mais on a $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$, donc $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Contradition. ■

Or, nous avons construit G de façon que pour tout énoncé φ il existe $p \in G$ tel que $p \Vdash \varphi$ ou $p \Vdash \neg\varphi$. Il est pour ça que nous avons imposé que G ait intersection non vide avec tous les sousensemble dense de C qui sont dans M. Puisque pour tout énoncé φ, $\{p \in C; p \Vdash \varphi \vee p \Vdash \neg\varphi\}$ est un ensemble dense, donc il contient une condition qui est dans G. Si donc, on a une condition $p \in G$, telle que $p \Vdash \varphi \vee \psi$; il faut que a un certain moment de la construction de G, soit clair lequel des deux énoncés est vrai dans $M[G]$. Autrement, il faut qu'il existe r telle que $p \leq r$ et $r \Vdash \varphi$ ou bien $r \Vdash \psi$. Egalement, pour le quantificateur $\exists$, si $p \Vdash \exists x\varphi(x)$ avec $p \in G$ alors il faut qu'il y ait dans G une condition r qui force $\varphi(\underline{\sigma})$ pour un certain $\sigma \in M^C$. Et bien, notre définition nous permet d'affirmer que :

Proposition 1.8.2

(d) $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \vee \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \Longleftrightarrow \forall q(p \leq q \Rightarrow \exists r(q \leq r \wedge (r \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n) \vee r \Vdash \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)))$;

(e) $p \Vdash \exists x\varphi \Longleftrightarrow \forall q(p \leq q \Rightarrow \exists r(q \leq r \wedge \exists\sigma \in M^C(r \Vdash \varphi(\sigma)))$.

Preuve. (d) Affirmation : Soient $\varphi(x_1, ..., x_n)$ et $\psi(x_1, ..., x_n)$ deux formules équivalents modulo ZFC, pour tout $\sigma_1, ..., \sigma_n \in M^C$ et pour tout $p \in C$ on a $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ ssi $p \Vdash \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$.
Démonstration : Soit G un filtre générique tel que $p \in G$. Puisque $M[G] \models ZFC$ alors $M[G] \models \forall x_1, ..., x_n(\varphi(x_1, ..., x_n) \iff \psi(x_1, ..., x_n))$. Autrement $M[G] \models \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ ssi $M[G] \models \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$. Donc $p \Vdash \varphi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$ ssi $p \Vdash \psi(\underline{\sigma}_1, ..., \underline{\sigma}_n)$.
Or, $\varphi \vee \psi \iff \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Donc $p \Vdash \varphi \vee \psi$ ssi $p \Vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ssi $\forall q \geq p(q \nVdash \neg\varphi \vee \neg\psi)$, ssi $\forall q \geq p(q \nVdash \neg\varphi \vee q \nVdash \neg\psi)$, ssi $\forall q \geq p\exists r \geq q(r \Vdash \phi \vee r \Vdash \psi)$.
(e) Comme dans (d) on a $p \Vdash \exists x\varphi$ ssi $p \Vdash \neg\forall\neg\varphi$. Cela est vrai ssi $\forall q \geq p(q \nVdash \forall x\neg\varphi)$, ssi $\forall q \geq p\ \exists\sigma \in M^C$ tel que $q \nVdash \neg\varphi(\sigma)$, ssi $\forall q \geq p\exists r \geq q\exists\sigma \in M^C$ tel que $r \Vdash \varphi$. ■

Ces deux résultats concludent ce chapitre sur le Forcing. La partie conclusive de cette exposition est consacrée à la démonstration du thèorème de Cohen qui démontre l'indépendance de l'hypothèse du continu de ZFC.

Chapitre 2

L'indépendence de l'hypothèse du continu

Nous pouvons maintenant démontrer l'indépendance de l'hypothèse du continu de la théorie $ZF{+}AC$. On choisit un cardinal infini π de M, $\pi > \aleph_1$. On prend comme ensemble de conditions l'ensemble C l'ensemble des fonctions dont le domain est une partie finie de $\omega \times \pi$, à valeurs dans $\{0,1\}$. Autrement $C = \{p; Fn(p) \wedge Dom(p) \subseteq \omega \times \pi, Im(p) \subseteq \{0,1\}\}$ bien ordonné par l'inclusion. Soit G un C-filtre générique sur M, on appelle f la fonction $\bigcup G$. Pour chaque $\alpha \in \pi$ on pose $d_\alpha = \{n \in \omega; f(n,\alpha) = 1\}$. Comme $f \in M[G]$, on voit que la fonction h que à tout α associe d_α est dans $M[G]$ une application de π dans $\mathscr{P}(\omega)$. Plus précisement cette fonction est une injection de π dans $\mathscr{P}(\omega)$. On va le montrer :

Considérons l'ensemble $\{p \in C; (\exists n \in \omega)[(n,\alpha) \in Dom(p) \wedge (n,\beta) \in Dom(p) \wedge p(n,\alpha) \neq p(n,\beta)]\}$, il est une partie dense de C qui est dans M. Il existe donc $p \in G$ et $n \in \omega$ tels que $(n,\alpha), (n,\beta) \in Dom(p)$ et $p(n,\alpha) \neq p(n,\beta)$. Donc $f(n,\alpha) \neq f(n,\beta)$ d'où $d_\alpha \neq d_\beta$.

Or π est dans M un cardinal supérieur à $\aleph_1$; mais on peut montrer que M et $M[G]$ ont dans ce cas les mêmes cardinaux, une fois que cela aura été montré on aura montré que π est dans $M[G]$ aussi un cardinal supérieur à $\aleph_1$.

Définition 2.0.3 *Etant donné un ensemble ordonné D de M, une* antichaîne *de D est une partie de D dont les éléments sont deux à deux incompatibles. On dit que D* satisfait la condition d'antichaîne dénombrable *(dans M), si toute antichaîne de D, qui est dans M, est dénombrable ou finie (dans M).*

Lemme 2.0.4 *C satisfait la condition d'antichaîne dénombrable.*

Preuve. On montre par induction sur $n \in \omega$ que si A est une antichaîne de C telle que $\forall p \in A[\#(Dom(p)) = n]$, alors A est fini. C'est évident pour $n = 0$. En supposant le resultat vrai pour n, on choisit $p_0 \in A$. On définit pour chaque $i \in Dom(p_0)$, un ensemble $A_i = \{p \in A; i \in Dom(p) \wedge p(i) = 1 - p_0(i)\}$. Comme tout élément de A différent de p_0 est incompatible avec p_0, on a $A = \{p_0\} \cup \bigcup_{i \in Dom(p_0)} A_i$.

Il suffit, donc, de montrer que chacun des A_i est fini. Or, les éléments de A_i sont deux à deux incompatibles et prennent tous la même valeur au point i; pour chaque $p \in A_i$, soit $\tilde{p}$ la restriction de p à $Dom(p) - \{i\}$. Si $B_i = \{\tilde{p}; p \in A_i\}$, alors B_i est donc une antichaîne de C, dont tous les éléments ont un domaine de cardinal n. Par hypothèse de recurrence B_i est donc fini et A_i aussi puisque A_i et B_i ont évidement le même cardinal. Soit alors B une antichaîne quelconque de C. pour $n \in \omega$ on pose $B_n = \{p \in B; \#(Dom(p)) = n\}$. Chaque B_n est fini et comme $B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$, B est dénombrable. ■

Le fait que M et $M[G]$ ont les mêmes cardinaux vient du théorème qui suit.

Théorème 2.0.5 *Soient D un ensemble ordonné de M, satisfaiant, dans M la condition d'antichaîne dénombrable, et H une partie de D qui est D-générique sur M. Alors M et $M[G]$ ont les mêmes cardinaux.*

Preuve. Il est évident que tout cardinal de $M[H]$ est un cardinal de M. Inversement, soit k un cardinal infini de M. Supposons que k ne soit pas un cardinal de $M[H]$; il existe donc $\lambda \in k$, et un objet $val(a)$ de $M[H]$ (avec $a \in M$) qui est une surjection de $\lambda surk$. D'après le lemme de vérité, il existe donc $p_o \in H$ tel que $p_0 \Vdash'' \underline{a}$ est une surjection de λ sur k''. Pour chaque $\alpha \in \lambda$, soit $X_\alpha = \{\beta \in k; \exists p \geq p_0(p \Vdash (\alpha, \beta) \in \underline{a})\}$. A chaque $\beta \in X_\alpha$, on peut donc associer $p_\beta \in D$ tel que $p_\beta \geq p_0$ et $p_\beta \Vdash (\alpha, \beta) \in \underline{a}$.

Si β, β' sont deux éléments dinstincts de X_α, alors p_β et $p_{\beta'}$ sont incompatibles on va le montrer. D'abord on montre que pour tout $s \in C$, $s \Vdash \beta \neq \beta'$. En effet, si par absurde il existe $q \in C$ tel que $q \Vdash (\beta = \beta')^M$ alors par le lemme de verité $M[H] \models (\beta = \beta')^M$ c'est à dire $M \models \beta = \beta'$, ce qui contredit $\beta \neq \beta'$. On a alors que pour tout $q \in C$, $q \nVdash (\beta = \beta')^M$. Mais alors pour tout $s \in C$, s force la negation de la formule $(\beta = \beta')^M$ (voir la Section 1.8), c'est à dire $s \Vdash (\beta \neq \beta')^M$. Alors si par absurde il existe une condition r tel que $r \geq p_\beta$ et $r \geq p_{\beta'}$ alors r force simultanément les énoncés $(\alpha, \beta) \in \underline{a}$, $(\alpha, \beta') \in \underline{a}$, $\beta \neq \beta'$, "$\underline{a}$ est une surjection de λ sur k". Ce qui est impossible car ces énoncés sont visiblement contradictoires.

L'ensemble des p_β pour $\beta \in X_\alpha$ est donc une antichaîne de D, donc est dénombrable. Comme l'application que à tout β associe p_β est injective (si $\beta \neq \beta'$

alors p_β et $p_{\beta'}$ sont distincts puisque incompatibles), on en déduit que X_α est dénombrable pour tout $\alpha < \lambda$. Comme k est un cardinal de M, on a dans M que $\#(\bigcup_{\alpha\in\lambda} X_\alpha) \leq \#(\lambda) \times \aleph_0 < k$. Il existe donc $\beta_0 \in k - \bigcup_{\alpha\in\lambda} X_\alpha$. Mais comme $val(a)$ est une surjection de λ sur k, il existe $\alpha_0 \in \lambda$ tel que $(\alpha_0, \beta_0) \in val(a)$. Par le lemme de vérité il existe donc $p \in H$, $p \Vdash (\alpha_0, \beta_0) \in \underline{a}$. On peut évidement supposer $p \geq p_0$ (p et p_0 sont compatibles puisuqe tous deux dans H). Mais on a, alors $\beta_0 \in X_{\alpha_0}$, ce qui contredit la définition de β_0. ∎

Or, puisque $M[G] \models \#(\mathscr{P}(\omega)) \geq \pi$ nous avons obtenu un modèle de $ZF + AF + AC + \#(\mathscr{P}(\omega)) > \aleph_1$. On a ainsi montré que si ZF est non contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas démontrable à partir des axiomes de ZF de l'axiome de fondation et de l'axiome du choix.

Conclusions

Il n'y a pas de quoi être surpris de l'existence d'énoncés ne pouvant être démontrés ou infirmés à partir d'un système d'axiomes donné : les théories mathématiques plus importantes sont incomplètes. Or, une théorie est un ensemble d'énoncés dèductivement clos, toute théorie mathématique, donc, est fondée sur un ensemble de propositions indémontrables, c'est à dire qu'on prend pour vraies. On voudrait alors, que les axiomes d'une théorie soit logiquement évidents ou au moins partagés par la communauté mathématique. En revanche, la validité de l'axiome du choix et ainsi l'hypothèse du continu ont été au centre de nombreus débats. Supposées vraies et évidents aux origine de la théorie des ensembles, ces deux hypothèses ont été en suite mise en discussion. Cela est la raison pour laquelle on en a cherché une démonstration en plusières moments de l'hystoires des mathématiques. La démonstration de leur indécidabilité n'a pas mis fin à ces recherches : ces hypothèses sont indécidables en tant que indépendants de la théorie des ensembles selon la formulation dite de Zermelo- Fraenkel, rien empèche que une différante formulation de la théorie des ensembles nous conveincra de leur validité ou non validité. Commencée il y a une trentaine d'années, la recherche d'axiomes « naturels » à ajouter à la théorie de Zermelo-Fraenkel (axiomes de détermination, axiomes de grands cardinaux, etc.) va peut être permettre, grâce aux travaux de Woodin, de résoudre prochainement l'hypothèse du continu... par la négative, ce que soupçonnait déjà Gödel.

Bibliographie

[Cohen, 1963] Cohen, P. (1963). *The indipendence of the axiom of choice.* (mimeographed, Stanford University).

[Jech, 1997] Jech, T. (1997). *Set theory.* Springer, second edition.

[Krivine, 1998] Krivine, J.-L. (1998). *Théorie des ensembles.* Cassini, Paris.

[Kunen, 1993] Kunen, K. (1993). *Set theory, an introduction to independece proofs.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.

[Smallyan and Fitting, 1996] Smallyan, R. M. and Fitting, M. (1996). *Set theory and the continuum problem.* Clarendon Press, Oxford.