

Table des matières

Préambule

Remerciements

1. Introduction

1-1. Qu'est-ce qu'une fonction calculable?	4
1-2. Quelles sont les fonctions incalculables?	5
1-3. Motivations	6
1-4. Panorama de la calculabilité	7

2. Infinis de Cantor

2-1. Équipotence et subpotence	15
2-2. Théorème de Cantor–Bernstein	16
2-3. Ensembles dénombrables	18
2-4. Argument diagonal de Cantor	21
2-5. Réels non calculables	23
2-6. Espace de Cantor	24

I Calculabilité classique 29

3. Fondements de la calculabilité

3-1. Fonctions calculables	31
3-2. Ensembles calculables	36
3-3. Programme universel	37
3-4. Théorème SMN	38
3-5. Lemme de remplissage	40
3-6. Théorème du point fixe de Kleene	41
3-7. Ensembles calculatoirement énumérables	44

4. Degrés Turing	
4-1. Les chaînes finies	51
4-2. Calcul avec oracle	52
4-3. Relativisation des preuves	54
4-4. Propriété de l'usage	56
4-5. Degrés Turing	57
4-6. Saut Turing	60
4-7. Calculabilité à la limite	61
4-8. Méthode des extensions finies	66
4-9. Degrés low	71
4-10. Degrés high	74
5. Hiérarchie arithmétique	
5-1. Propriétés élémentaires	82
5-2. Hiérarchie arithmétique et calculabilité	87
5-3. Relativisation à un oracle	88
5-4. Degrés many-one	89
5-5. Théorème de Post	91
5-6. Théorème de Rice	93
5-7. Codes arithmétiques	94
6. La thèse de Church-Turing	
6-1. L'Entscheidungsproblem et la quête du Graal	99
6-2. Thèse de Church-Turing	104
6-3. Étude détaillée des fonctions récursives	107
7. Immunité et croissance de fonction	
7-1. Ensembles immunes	130
7-2. Fonctions DNC	132
7-3. Critère de complétude d'Arslanov	136
7-4. Fonctions hyperimmunes	138
7-5. Degrés calculatoirement dominés	140
7-6. Théorème de domination de Martin	147
7-7. Degrés High ou DNC	151
8. Classes Π_1^0 et degrés PA	
8-1. Arbres binaires	154
8-2. Topologie sur l'espace de Cantor	158
8-3. Classes Π_1^0	165
8-4. Théorèmes de base	168
8-5. Bases pour les classes Π_1^0 parfaites	172
8-6. Degrés PA	174
8-7. Arbres à branchement fini	179

9. Interlude formel	
9-1. Un peu d'histoire : la crise des fondements	189
9-2. La logique du premier ordre	195
9-3. Théorèmes d'incomplétude de Gödel	212
9-4. Système ZFC	223
10. Forcing de Cohen	
10-1. Formules de l'arithmétique du second ordre	232
10-2. Forcing Σ_1^0/Π_1^0	234
10-3. Généricité effective	243
10-4. Forcing Σ_n^0/Π_n^0	258
10-5. Ensembles arbitrairement génériques	266
11. Forcing effectif	
11-1. Fondements du forcing	273
11-2. Relation de forcing	276
11-3. Forcing avec des arbres	279
11-4. Complexité calculatoire et question de forcing	283
12. La quête de degrés naturels	
12-1. Trois problèmes indécidables emblématiques	298
12-2. Approche pour la naturalité des degrés Turing	301
12-3. Problèmes de masse	305
13. Méthode de priorité et degrés c. e.	
13-1. Degrés c. e.	310
13-2. Méthode de permission	311
13-3. Méthode de priorité Σ_1^0 (à blessure finie)	312
13-4. Méthode de priorité Σ_2^0	320
13-5. Méthode de priorité Π_2^0 (à blessure infinie)	323
14. Structure des degrés Turing	
14-1. Degrés minimaux	336
14-2. Nature de \mathcal{D}	342
14-3. Universalité de \mathcal{D}	347
14-4. Théorie du premier ordre de \mathcal{D}	352
14-5. Structure des degrés c. e.	360

II Aléatoire algorithmique

15. Introduction

16. Complexité de Kolmogorov et nombres aléatoires	
16-1. Complexité de Kolmogorov	370
16-2. Nombres aléatoires à la Chaitin/Levin	379
16-3. Caractérisation de K	385
16-4. Ensembles K -triviaux	389
17. Boréliens, mesure et calculabilité	
17-1. Un peu d'histoire	395
17-2. Premières intuitions sur la mesure	399
17-3. Classes boréliennes	402
17-4. Mesure de Lebesgue	407
18. Aléatoire au sens de Martin-Löf	
18-1. Intuitions et définitions	415
18-2. Les aléatoires de Martin-Löf et de Chaitin/Levin coïncident	418
18-3. Aléatoire et degré Turing	419
18-4. Aléatoire et degré DNC	423
19. Autres notions d'aléatoire	
19-1. Les fortement MLR	427
19-2. Relativisation de l'aléatoire	432
19-3. Les 2-aléatoires	436
19-4. Aléatoires incomplets	439
20. Les K-triviaux	
20-1. Lowness et bases pour l'aléatoire	445
20-2. Le processus d'or	450
20-3. Caractérisation des K -triviaux c. e.	462
20-4. Une nouvelle preuve de K -trivial implique low-pour- K	470

III Mathématiques à rebours 473

21. Introduction	
21-1. Quête des axiomes optimaux	475
21-2. Comparaison des théorèmes	479
22. Arithmétique du second ordre	
22-1. Langage de Z_2	482
22-2. La théorie Z_2	484
22-3. Sémantiques de l'arithmétique du second ordre	486
22-4. Formaliser l'analyse dans Z_2	491
22-5. RCA_0 ou les mathématiques calculables	495
22-6. ACA_0 et la hiérarchie arithmétique	501

22-7. WKL_0 et l'argument de compacité	505
22-8. Systèmes plus puissants	511
23. Induction et conservation	
23-1. Fonctions RCA_0 -prouvablement calculables	520
23-2. Sous-systèmes faibles de PA	522
23-3. Hiérarchies d'induction	528
23-4. Fonctions primitives récursives et RCA_0	534
23-5. Le schéma de compréhension bornée	538
23-6. Théorèmes de conservation	542
23-7. Programme de Hilbert	553
24. Réductions calculatoires	
24-1. ω -réduction	558
24-2. Réduction calculatoire	563
24-3. Réduction Weihrauch	565
24-4. Jeux de réduction	569
24-5. Réductions fortes	571
25. Théorème de Ramsey	
25-1. Aperçu général	576
25-2. Théorème de Ramsey dans la hiérarchie arithmétique	579
25-3. Principe infini des tiroirs	591
25-4. Théorème de Ramsey pour les paires	610

IV Hypercalculabilité 621

26. Introduction	
26-1. Motivations	624
26-2. Panorama de l'hypercalculabilité	626
26-3. Correspondance avec la calculabilité classique	627
27. Nombres transfinis	
27-1. Motivation : itérations calculables du saut	631
27-2. Ordinaux	635
27-3. Induction et récurrence transfinie	643
27-4. Ordinaux dénombrables et indénombrables	649
27-5. Ordinaux effectifs	653
27-6. Relativisation	660

28. Ensembles hyperarithmétiques	
28-1. Hiérarchie de Kleene	663
28-2. Les singletons Π_2^0	671
28-3. Relativisation	673
28-4. Hiérarchie borélienne effective	674
29. Au delà des hyperarithmétiques	
29-1. Un peu d'histoire : l'école de Moscou	679
29-2. Quantifications du second ordre	684
29-3. Les Π_1^1 et les bons ordres	689
29-4. Analogies entre ensembles Π_1^1 et ensembles c. e.	693
29-5. Théorème d'équivalence de Kleene/Souslin	696
29-6. Autres théorèmes de majoration	703
29-7. Réduction hyperarithmétique	705
30. Classes Σ_1^1 et Π_1^1	
30-1. Représentation canonique des classes Σ_1^1	707
30-2. Théorèmes de base pour les classes Σ_1^1	709
30-3. L'hypothèse du continu pour les classes Σ_1^1	713
30-4. Quelques classes Π_1^1 emblématiques	716
30-5. Étude d'une classe Π_1^1 très spéciale	719
30-6. Les singletons Π_1^1	724
31. Les systèmes ATR_0 et $\Pi_1^1\text{-CA}_0$	
31-1. Définitions	729
31-2. ATR_0 et $\Pi_1^1\text{-CA}_0$ en hypercalculabilité	732
31-3. HYP n'est pas modèle de ATR_0	733
31-4. Codes d'ordinaux non standard	737
31-5. Séparation entre ATR_0 et $\Pi_1^1\text{-CA}_0$	743
A. Correction des exercices	
Bibliographie	793
Notations	809
Index	815