TD n° 4

Le temps polynômial

Exercice 1. *Une machine à shift*

1. Décrire une machine de Turing d'alphabet d'entrée $\{a,b\}$ qui "shift" son entrée (*i.e.* qui remplace le mot $\mathrm{B}w_1 \dots w_n$ initialement écrit sur son ruban par le mot $\mathrm{BB}w_1 \dots w_n$).
2. Évaluer la complexité de cette machine.

Nous verrons bientôt que selon une conjecture communément admise, le problème SAT *(satisfaisabilité d'une formule propositionnelle) n'est pas polynômial. Dans les deux exercices qui suivent, nous allons montrer que deux sous-problèmes de* SAT *sont dans* P. *Rappelons d'abord quelques définitions :*
- *Un* littéral *est une formule propositionnelle de l'une des forme p ou $\overline{p}$, où p est une variable propositionnelle. (On note $\overline{p}$ pour $\neg p$.)*
- *Une* clause *est une disjonction de littéraux.*

Exercice 2. HORN-SAT $\in$ P

1. Une *clause de Horn* est une clause comportant au plus un littéral positif. Autrement dit, c'est une formule propositionnelle de la forme $\overline{p}_1 \vee \cdots \vee \overline{p}_{n-1} \vee p_n$ (ce qui s'écrit aussi : $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n$) ou de la forme p (simple variable propositionnelle). Montrez que le problème suivant est dans P :

   HORN-SAT
   Entrée : Une conjonction Φ de clauses de Horn ;
   Question : Φ est-elle satisfaisable ?

Exercice 3. 2-SAT $\in$ P

Une *2-clause* est une clause comportant au plus deux littéraux (*e.g.*, $p \vee q$, $\neg p \vee q$, $\neg p$, etc). Montrez que le problème suivant est dans P :

2-SAT
Entrée : Une conjonction Φ de 2-clauses ;
Question : Φ est-elle satisfaisable ?

Exercice 4.

Montrer que les problèmes suivants sont dans P.

PREMIERS 2 À 2
Entrée : deux entiers n et p.
Question : n et p sont-ils premiers entre eux ?

VERIF-SAT

Entrée : une formule propositionnelle φ et une valuation v sur les variables de φ.
Question : v satisfait-elle φ ?

Exercice 5. P *et la complémentation*

Montrer que la classe P est close par complémentation (*i.e.* si un langage L est dans P alors son complémentaire $\overline{L}$ est dans P).

Exercice 6.

Un graphe $G = (S,A)$ est dit *3-coloriable* s'il existe une application $c : S \to \{R,V,B\}$ telle que pour toute arête $(x,y) \in A$, $c(x) \neq c(y)$. On considère les problèmes suivants :

3-COLOR
Entrée : Un graphe G ;
Question : G est-il 3-coloriable ?

CLAUSE-SAT
Entrée : Une conjonction Φ de clauses propositionnelles ;
Question : Φ est-elle satisfaisable ?

Montrer que 3-COLOR $\leq_{\text{pol}}$ CLAUSE-SAT.

Exercice 7.

Une *clique* dans un graphe $G = (S,A)$ est un ensemble de sommets deux à deux reliés dans G. Une k-clique est une clique de taille k. On considère les problèmes suivants :

CLIQUE
Entrée : Un graphe G et un entier $k \geq 1$;
Question : G admet-il une k-clique ?

3-SAT
Entrée : Une conjonction Φ de 3-clauses propositionnelles ;
Question : Φ est-elle satisfaisable ?

Montrer que 3-SAT $\leq_{\text{pol}}$ CLIQUE.

Exercice 8.

On appelle DNF-SAT la restriction de SAT aux formules écrites sous forme normale disjonctive :

DNF-SAT
Entrée : Une formule propositionnelle DNF Φ ;
Question : Φ est-elle satisfaisable ?

1. Montrer DNF-SAT est polynômial.

2. La procédure standard de mise sous forme normale disjonctive d'une formule propositionnelle est-elle une réduction polynômiale de SAT à DNF-SAT ?