

Théorie des Graphes

11. Graphes orientés

Un *graphe orienté* G est défini par:

X un ensemble non vide de *sommets*

A un ensemble non vide d'*arcs* (*arêtes orientées*)

Théorie des Graphes

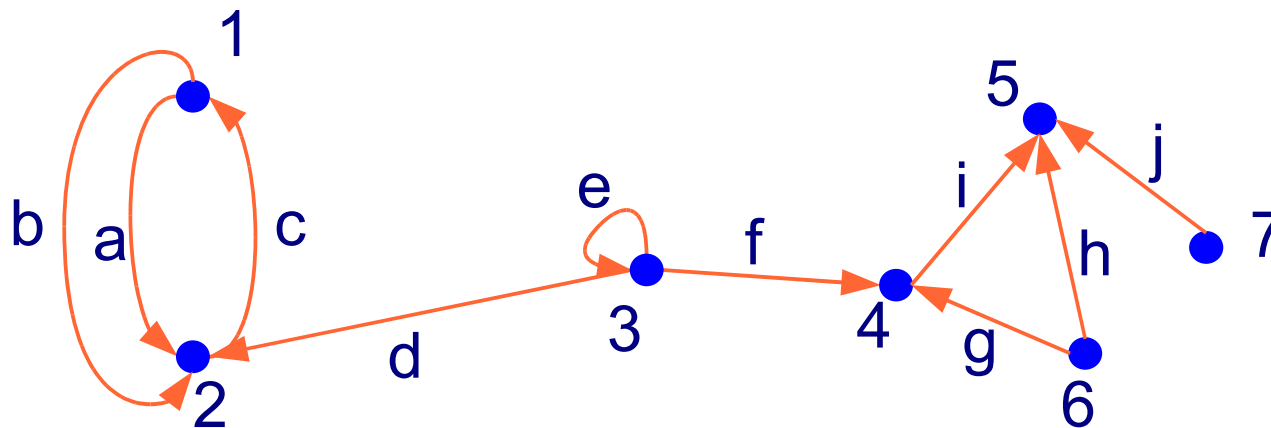
11. Graphes orientés

Un *graphe orienté* G est défini par:

X un ensemble non vide de *sommets*

A un ensemble non vide d'*arcs* (*arêtes orientées*)

Exemple.



Théorie des Graphes

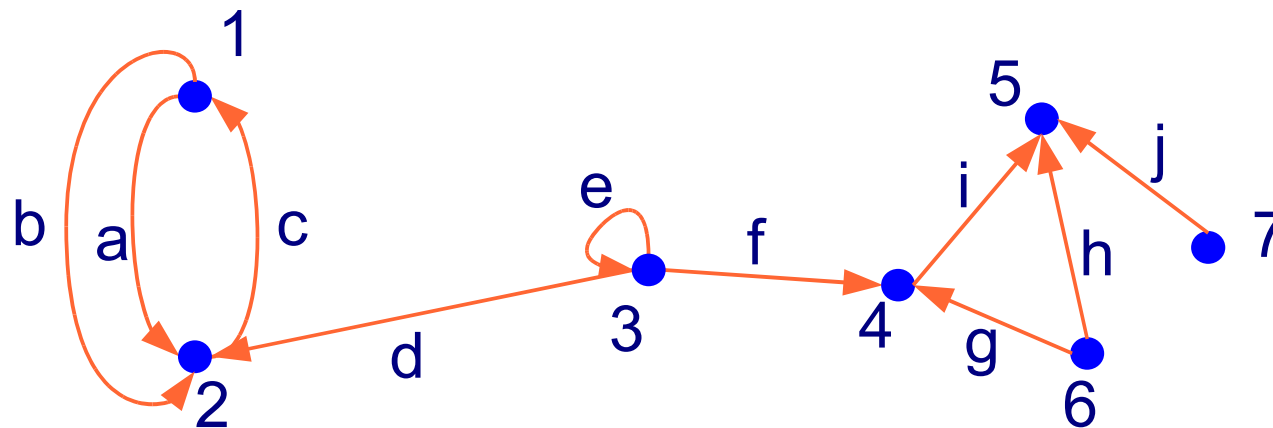
11. Graphes orientés

Un *graphe orienté* **G** est défini par:

X un ensemble non vide de *sommets*

A un ensemble non vide d'*arcs* (*arêtes orientées*)

Exemple.



1 et **2** sont les extrémités de l'*arc a*,
dont **1** est l'*origine* et **2** est la *destination*

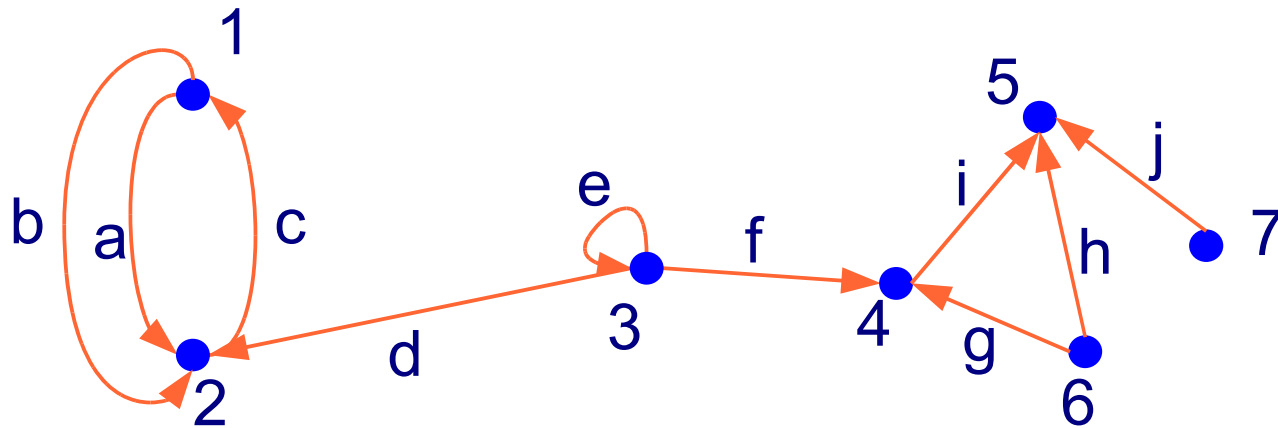
Théorie des Graphes

11.1 Notations

G est noté par (X,A) .

X et A sont aussi notés par $X(G)$ et $A(G)$

$n(G)=n$ et $m(G)=m$ dénotent les nombres de sommets et d'arcs.



Théorie des Graphes

11.2 Terminologies

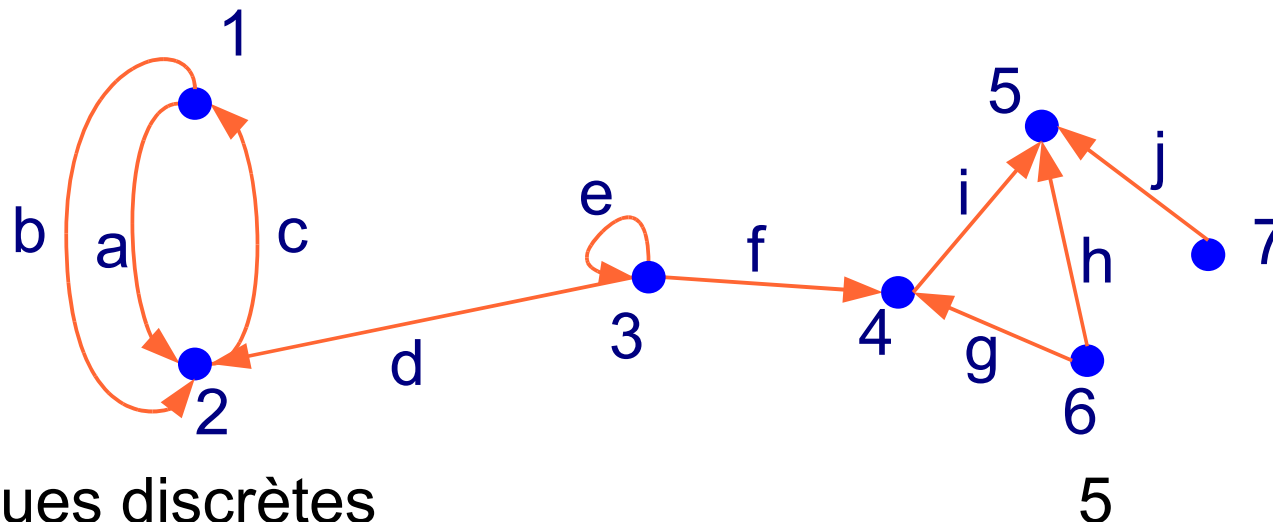
L'arc **a** est associé au couple **(1,2)**. On dit aussi que

l'arc **a** va de **1** à **2**

l'arc **a** est incident à **1** et à **2**

l'arc **a** sort de **1** et entre dans **2**

2 est un *successeur* de **1**, et **1** est un *prédécesseur* de **2**.



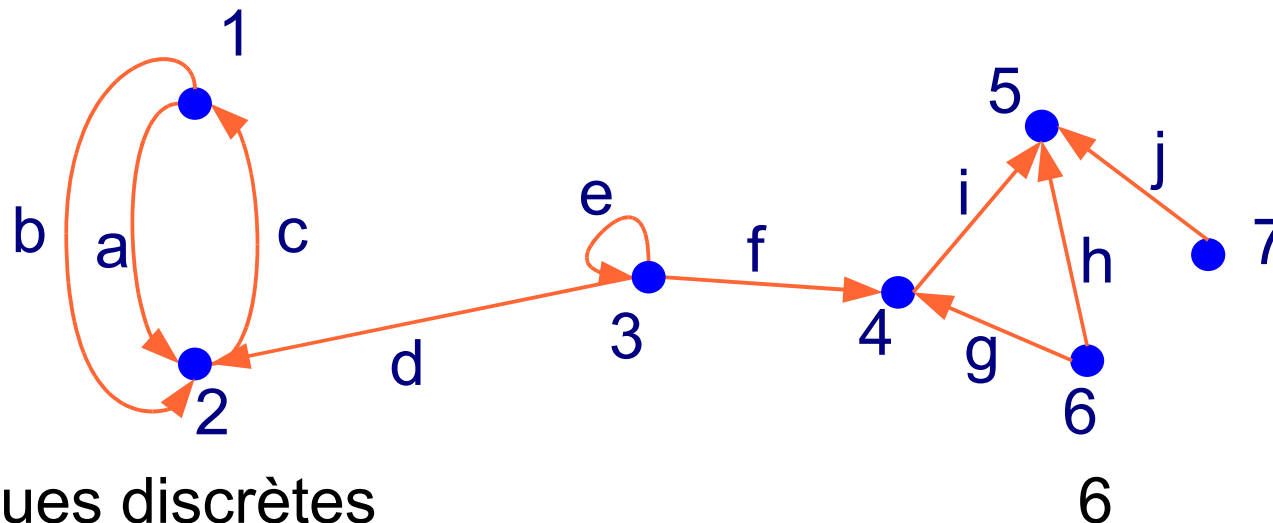
Théorie des Graphes

11.2 Terminologies

L'arc **e** est une *boucle*.

Les arcs **a** et **b** forment un arc *multiple* associé au couple **(1,2)**

Deux arcs **a** et **c** sont *opposés*



Théorie des Graphes

11.2 Terminologies

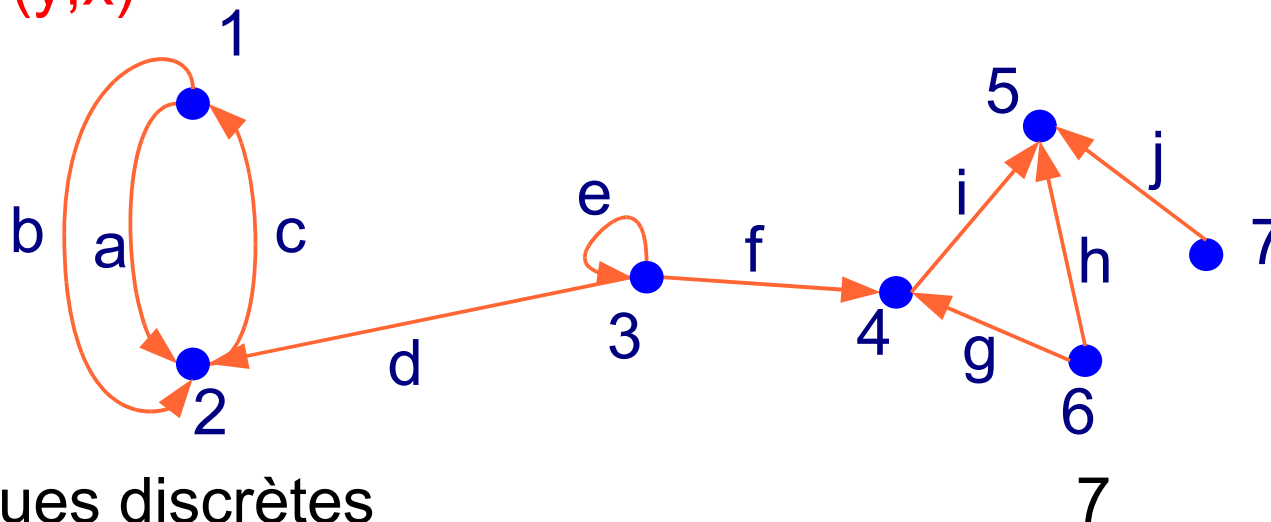
L'arc **e** est une *boucle*.

Les arcs **a** et **b** forment un arc *multiple* associé au couple $(1,2)$

Deux arcs **a** et **c** sont *opposés*

Graphe *strict* = pas de boucles, ni d'arcs multiples

Un graphe strict est dit *symétrique* si pour tout arc (x,y) , il existe l'arc opposé (y,x)

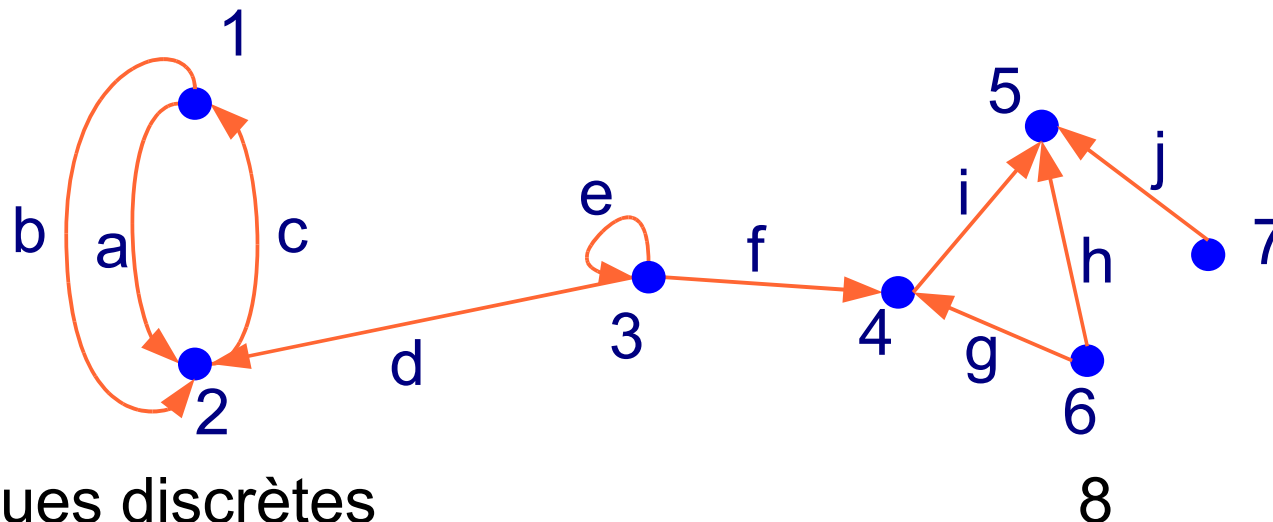


Théorie des Graphes

11.3 Représentation

Un graphe orienté est représenté comme un graphe non orienté mais avec des flèches indiquant les orientations.

Les graphes orientés sont aussi considérés non étiquetés, c.à.d., à un isomorphe près.



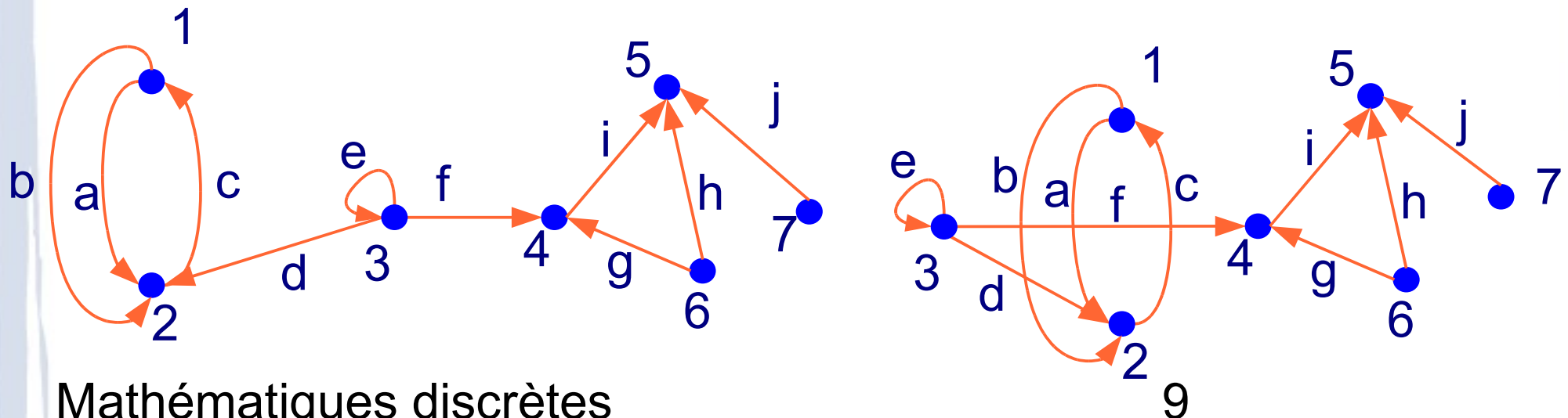
Théorie des Graphes

11.3 Représentation

Un graphe orienté est représenté comme un graphe non orienté mais avec des flèches indiquant les orientations.

Les graphes orientés sont aussi considérés *non étiquetés*, c.à.d., à *un isomorphe près*.

Exemple.



Mathématiques discrètes

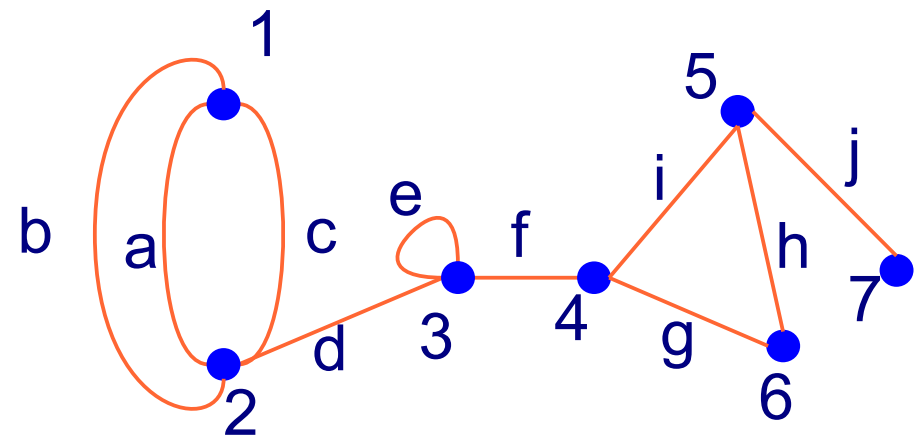
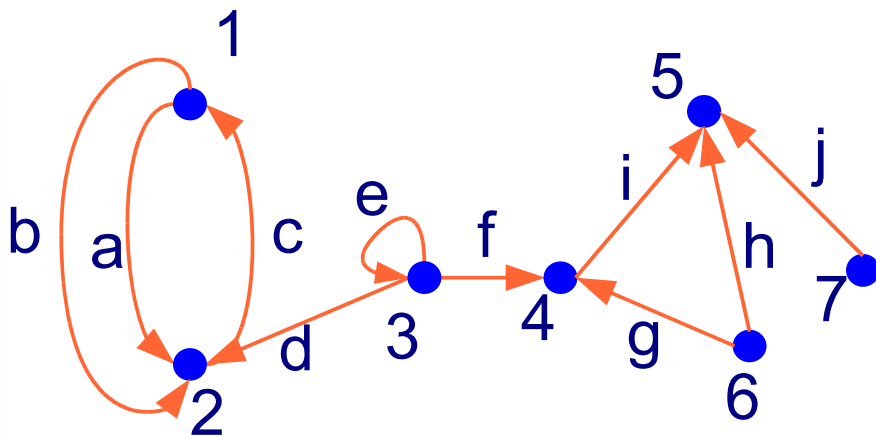
Théorie des Graphes

11.4 Graphe non orienté associé

Soit un graphe orienté G .

Le *graphe non orienté associé* à G est défini en oubliant l'orientation des arcs de G .

Exemple.



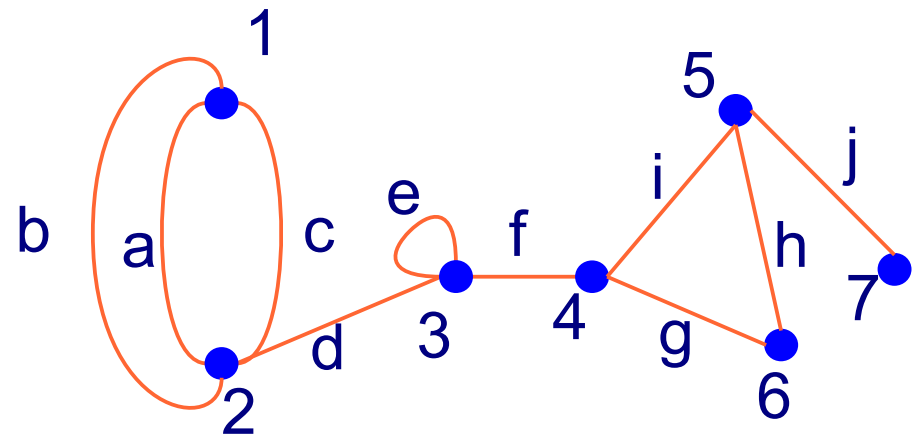
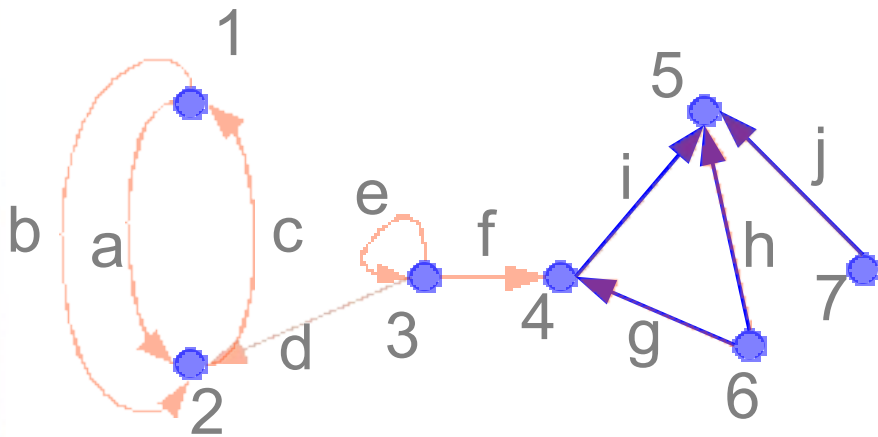
Théorie des Graphes

11.4 Graphe non orienté associé

Soit un graphe orienté G .

Le *graphe non orienté associé* à G est défini en oubliant l'orientation des arcs de G .

Remarque. Soit un graphe non orienté H . Il y a au plus 2^m graphes orientés dont le graphe non orienté associé est H .



Théorie des Graphes

11.4 Graphe non orienté associé

Soit un graphe orienté G . En considérant le *graphe non orienté associé* à G , on a les notions non orientées:

degré, chaînes, cycles, connexité et composantes connexes,...

Ces notions sont indépendantes de l'orientation des arcs.

Théorie des Graphes

11.5 Notions orientées

En prenant en compte l'orientation des arcs, on a

arc, chaîne orientée (ou chemin), cycle orienté (ou circuit), simple, élémentaire, sous graphe, sous graphe engendré, graphe partiel,...

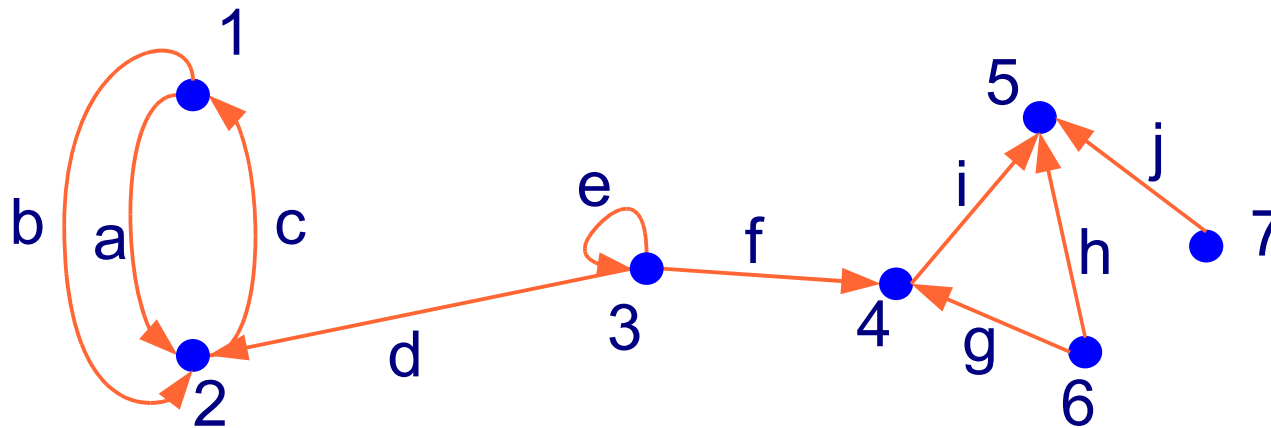
Théorie des Graphes

11.5 Notions orientées

En prenant en compte l'orientation des arcs, on a

arc, chaîne orientée (ou chemin), cycle orienté (ou circuit), simple, élémentaire, sous graphe, sous graphe engendré, graphe partiel,...

Exemple.



Théorie des Graphes

11.6 Degrés intérieurs et extérieurs

degré intérieur de x = nombre d'arcs entrant dans x ,

noté par $d_G^-(x)$ ou $d^-(x)$

degré extérieur de x = nombre d'arcs sortant de x ,

noté par $d_G^+(x)$ ou $d^+(x)$

Théorie des Graphes

11.6 Degrés intérieurs et extérieurs

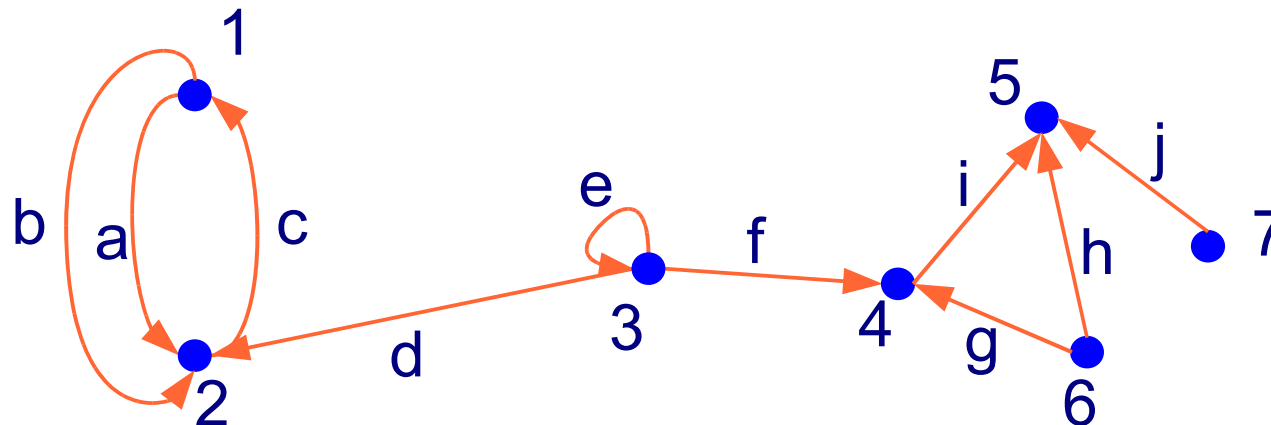
degré intérieur de x = nombre d'arcs entrant dans x ,

noté par $d_G^-(x)$ ou $d^-(x)$

degré extérieur de x = nombre d'arcs sortant de x ,

noté par $d_G^+(x)$ ou $d^+(x)$

Exemple.



Mathématiques discrètes

16

Théorie des Graphes

11.6 Degrés intérieurs et extérieurs

degré intérieur de x = nombre d'arcs entrant dans x ,

noté par $d_G^-(x)$ ou $d^-(x)$

degré extérieur de x = nombre d'arcs sortant de x ,

noté par $d_G^+(x)$ ou $d^+(x)$

Propriété. On a toujours

$$d^-(x) + d^+(x) = d(x)$$

Théorie des Graphes

11.6 Degrés intérieurs et extérieurs

degré intérieur de x = nombre d'arcs entrant dans x ,

noté par $d_G^-(x)$ ou $d^-(x)$

degré extérieur de x = nombre d'arcs sortant de x ,

noté par $d_G^+(x)$ ou $d^+(x)$

Propriété. On a toujours

$$d^-(x) + d^+(x) = d(x)$$

De plus,

$$\sum_x d^-(x) = \sum_x d^+(x) = m$$

Théorie des Graphes

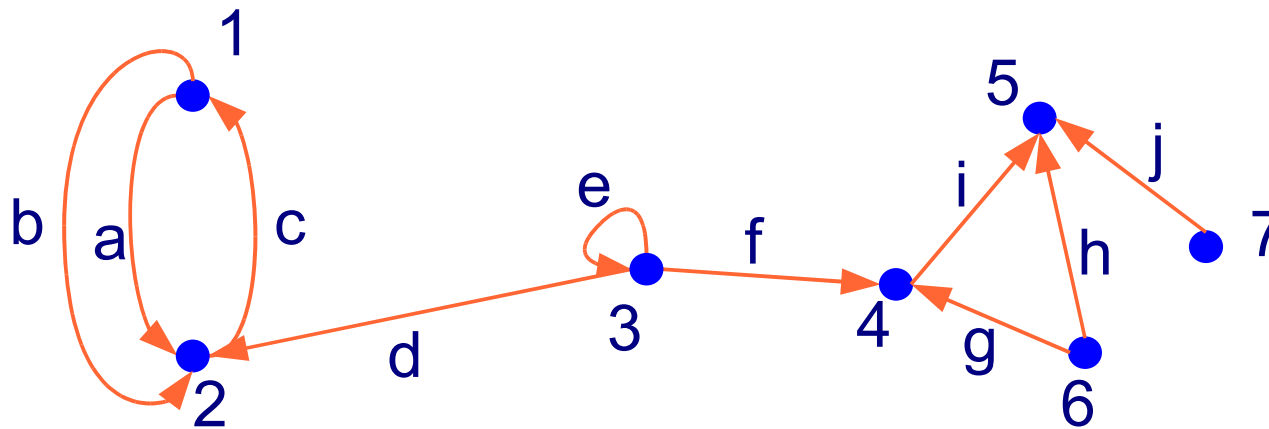
11.6 Degrés intérieurs et extérieurs

Propriété. On a toujours

$$d^-(x) + d^+(x) = d(x)$$

De plus,

$$\sum_x d^-(x) = \sum_x d^+(x) = m$$



Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

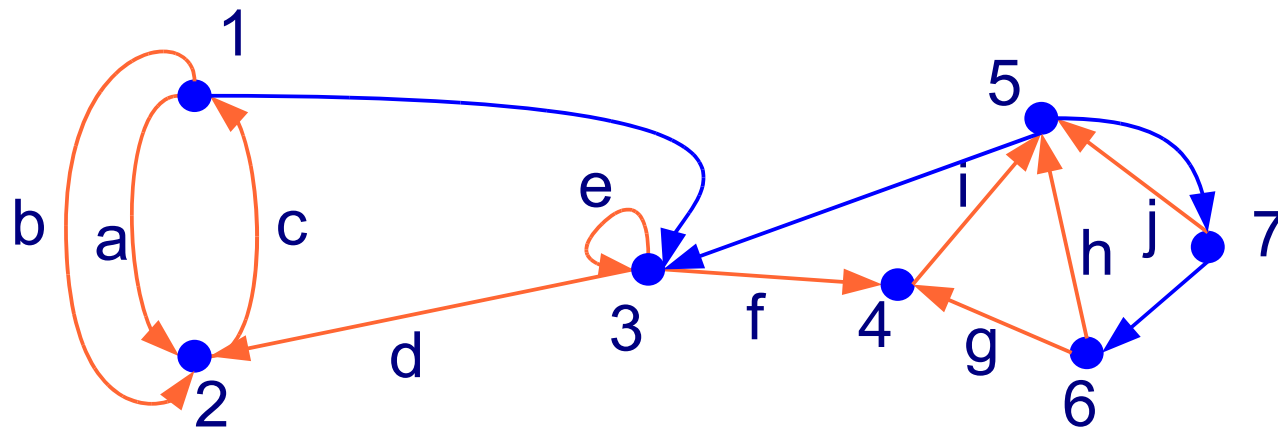
Définition. *Fortement connexe* = Quelque soient deux sommets distincts x et y , il existe un chemin allant de x à y .

Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

Définition. *Fortement connexe* = Quelque soient deux sommets distincts x et y , il existe un chemin allant de x à y .

Exemple.

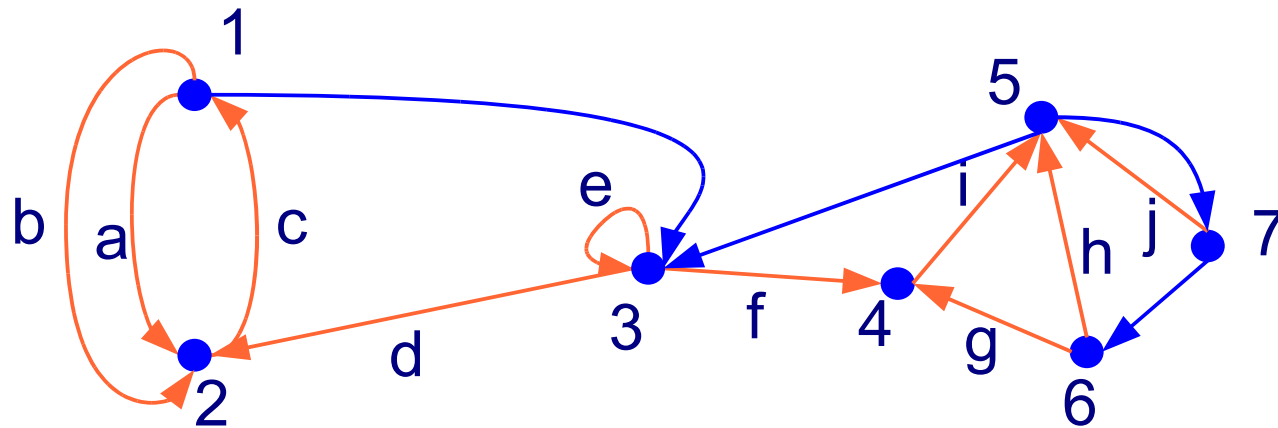


Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

Définition. *Fortement connexe* = Quelque soient deux sommets distincts x et y , il existe un chemin allant de x à y .

Exemple.



Remarque. Cette notion est symétrique: quelque soient deux sommets distincts x et y , il existe:

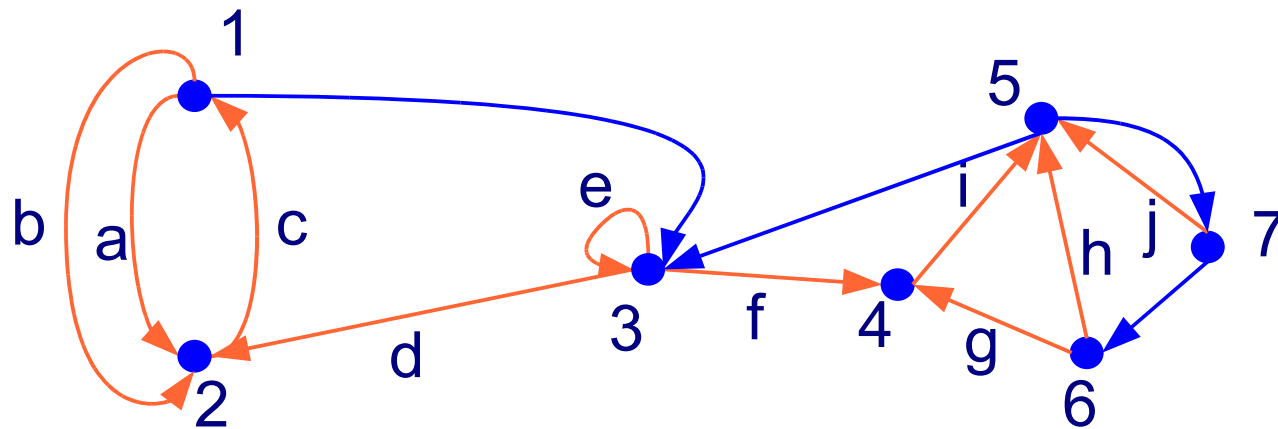
- un chemin allant de x à y
- et un chemin allant de y à x

Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

Définition. *Fortement connexe* = Quelque soient deux sommets distincts x et y , il existe un chemin allant de x à y .

Exemple.



Remarque. Cette notion est symétrique: quelque soient deux sommets distincts x et y , il existe:

un chemin allant de x à y
et un chemin allant de y à x

x et y sont *équivalents*

Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

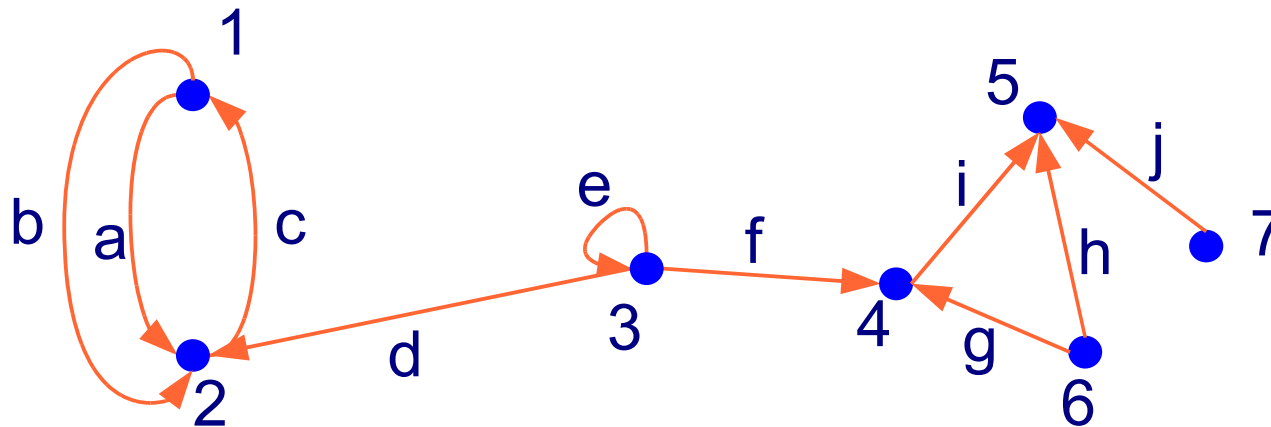
Définition. *Composante fortement connexe* = sous graphe engendré fortement connexe et maximal.

Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

Définition. *Composante fortement connexe* = sous graphe engendré fortement connexe et maximal.

Exemple.

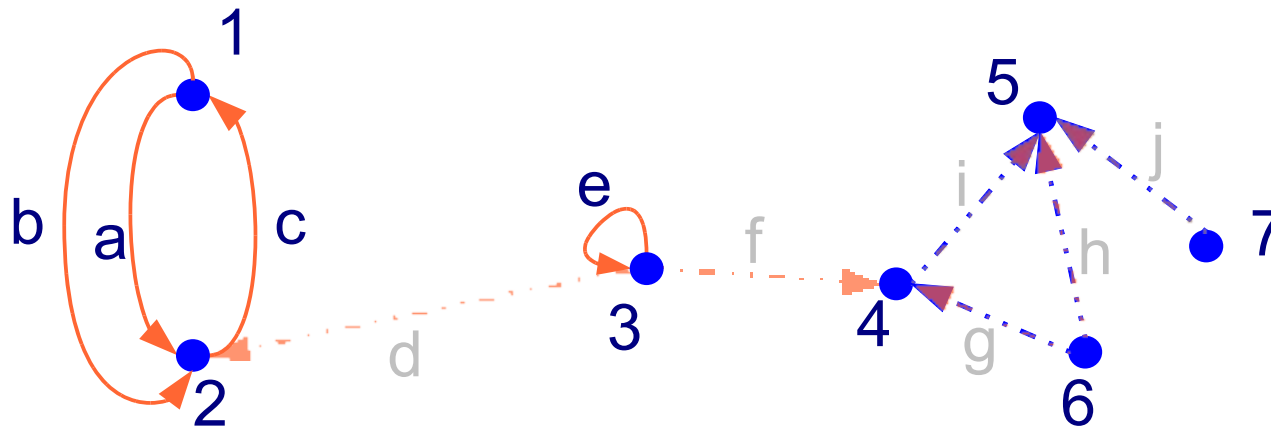


Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

Définition. *Composante fortement connexe* = sous graphe engendré fortement connexe et maximal.

Exemple.

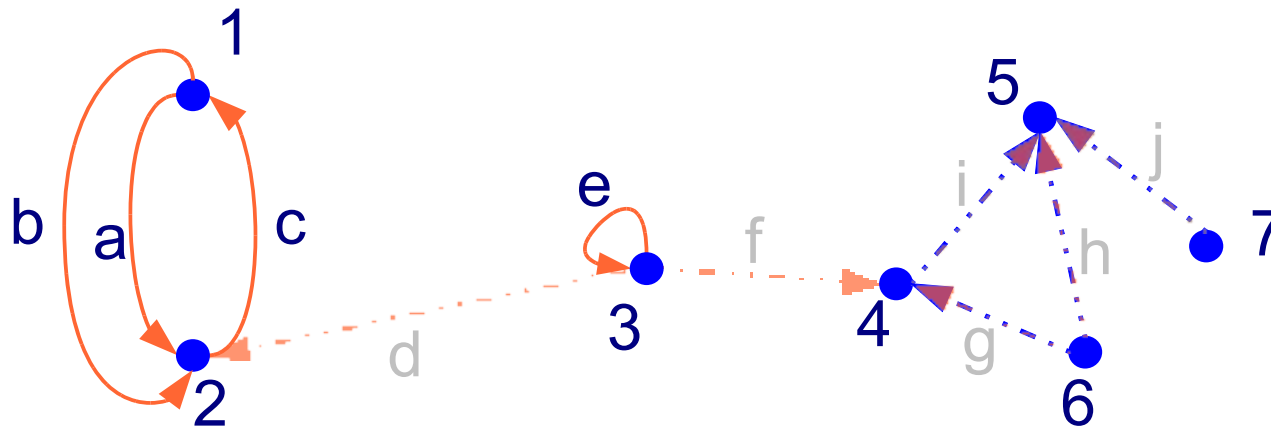


Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

Définition. *Composante fortement connexe* = sous graphe engendré fortement connexe et maximal.

Exemple.



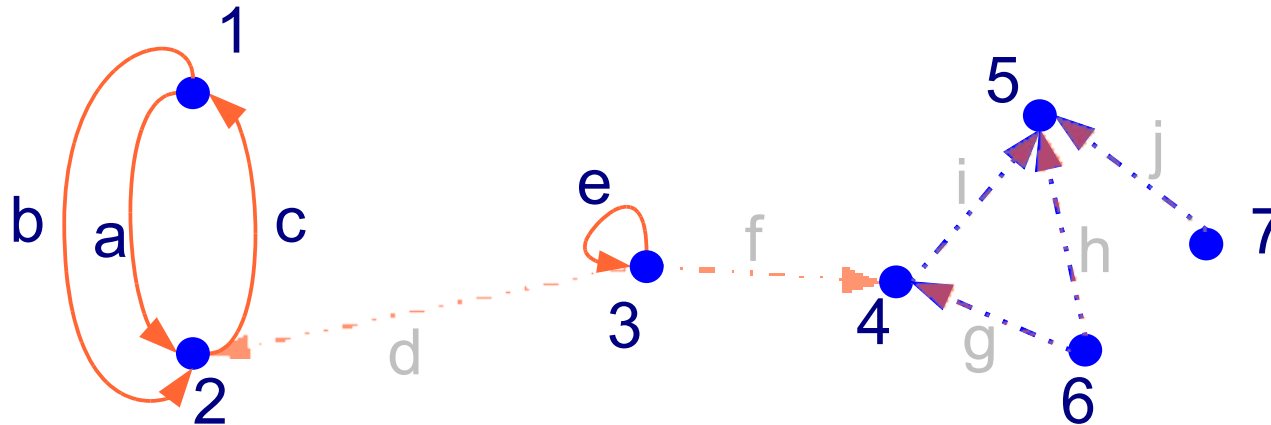
Remarque 1. Composante fortement connexe = Sous graphe engendré par une classe de sommets équivalents

Théorie des Graphes

11.7 Composantes fortement connexes

Définition. *Composante fortement connexe* = sous graphe engendré fortement connexe et maximal.

Exemple.



Remarque 1. Composante fortement connexe = Sous graphe engendré par une classe de sommets équivalents

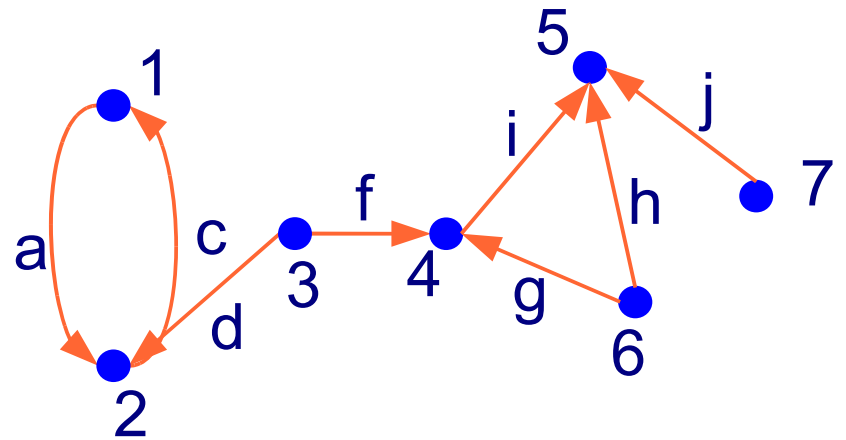
Remarque 2. Deux sommets d'un même circuit sont équivalents. D'où, ils sont dans une même composante fortement connexe

Théorie des Graphes

11.8 Représentation en machine

Soit un graphe orienté simple G .

Il est possible de représenter G
par la matrice d'adjacence M .



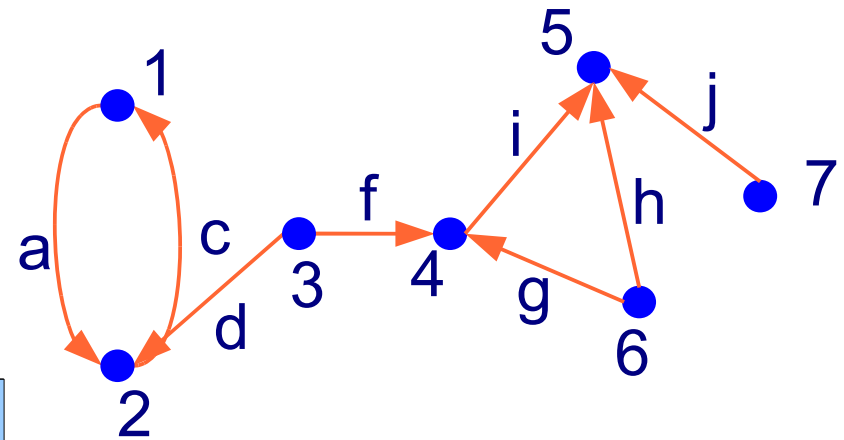
Théorie des Graphes

11.8 Représentation en machine

Soit un graphe orienté simple G .

Il est possible de représenter G
par la matrice d'adjacence M .

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0



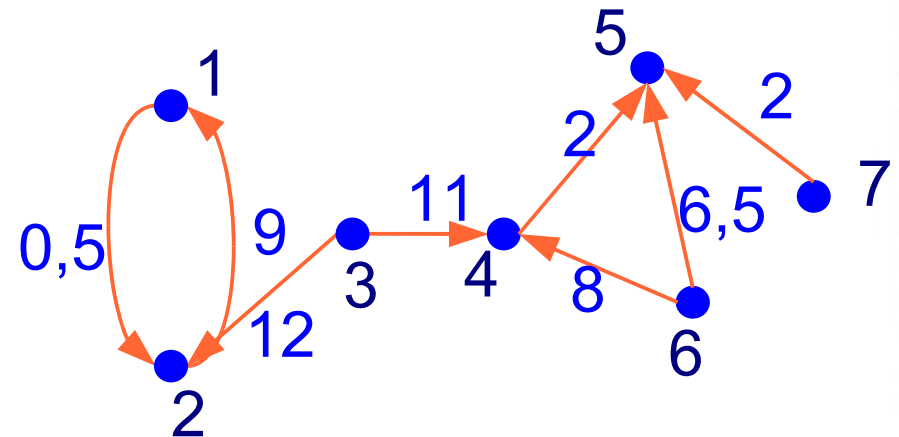
Par exemple,
arc $(3,4) \leftrightarrow$ mettre 1 à la
case (ligne 3, colonne 4)

Théorie des Graphes

11.8 Représentation en machine

Similairement aux graphes non orientés valués, pour un graphe orienté simple valué G , on met la valeur de l'arc à la place de 1 et la valeur ∞ à la place de 0.

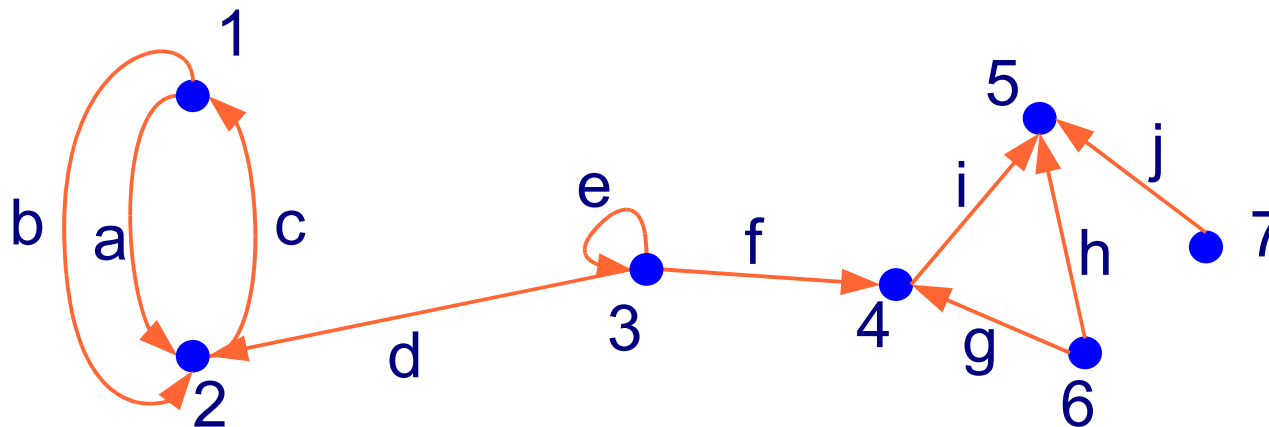
	1	2	3	4	5	6	7
1		0,5					
2	9						
3		12		11		∞	
4					2		
5		∞					
6				8	6,5		
7					2		



Théorie des Graphes

12. Graphes orientés sans circuits

Définition. Sommet *source* = sommet sans arc entrant (le degré intérieur est nul)

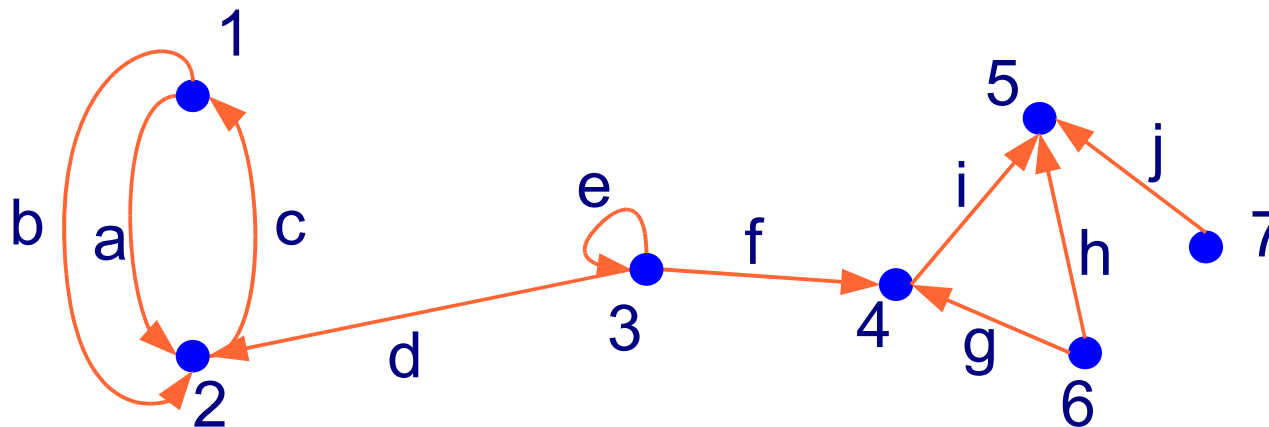


Théorie des Graphes

12. Graphes orientés sans circuits

Définition. Sommet *source* = sommet sans arc entrant (le degré intérieur est nul)

Définition. Sommet *puits* = sommet sans arc sortant (le degré extérieur est nul)



Théorie des Graphes

12. Graphes orientés sans circuits

Définition. Sommet *source* = sommet sans arc entrant (le degré intérieur est nul)

Définition. Sommet *puits* = sommet sans arc sortant (le degré extérieur est nul)

Propriété. Dans un graphe orienté sans circuit, il existe un sommet source et un sommet puits.

Théorie des Graphes

12. Graphes orientés sans circuits

Définition. Sommet *source* = sommet sans arc entrant (le degré intérieur est nul)

Définition. Sommet *puits* = sommet sans arc sortant (le degré extérieur est nul)

Propriété. Dans un graphe orienté sans circuit, il existe un sommet source et un sommet puits.

Preuve. A partir d'un sommet quelconque, on pourra construire un sommet source et un sommet puits.

Théorie des Graphes

12.1 Tri topologique

Définition. Les sommets d'un graphe orienté G sont *triés topologiquement* s'il existe une bijection

$$f : X \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

telle que s'il existe un arc allant de x à y alors

$$f(x) < f(y)$$

Théorie des Graphes

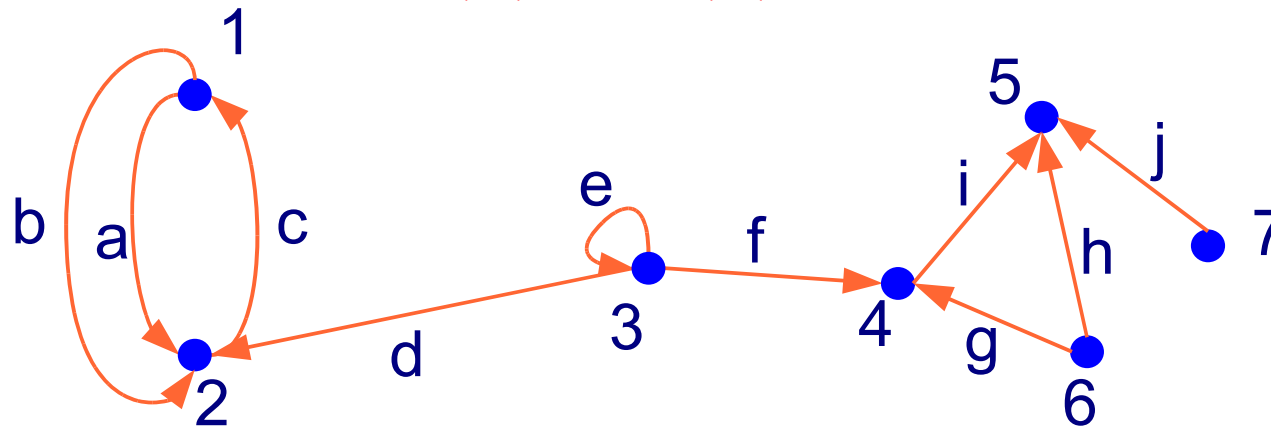
12.1 Tri topologique

Définition. Les sommets d'un graphe orienté G sont *triés topologiquement* s'il existe une bijection

$$f : X \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

telle que s'il existe un arc allant de x à y alors

$$f(x) < f(y)$$



Théorie des Graphes

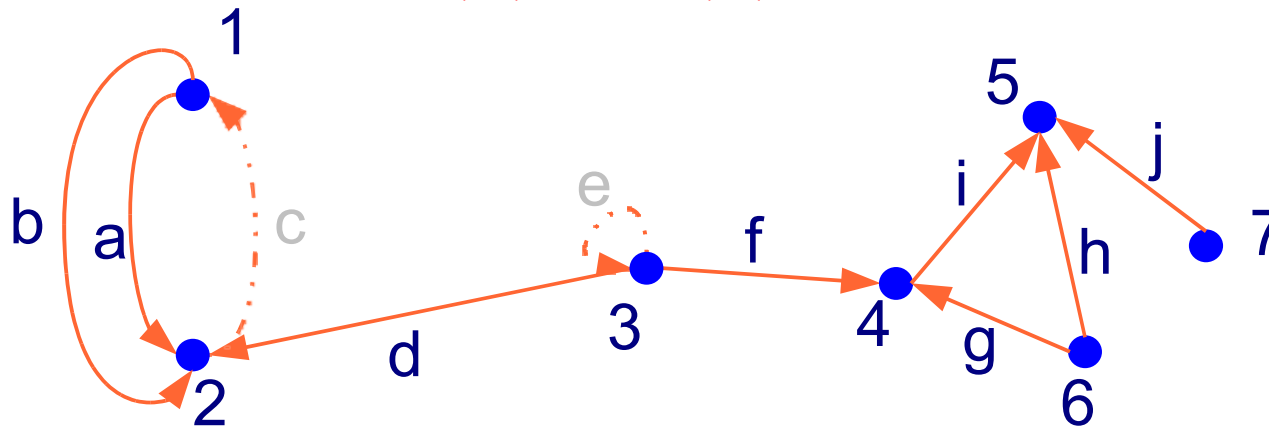
12.1 Tri topologique

Définition. Les sommets d'un graphe orienté G sont *triés topologiquement* s'il existe une bijection

$$f : X \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

telle que s'il existe un arc allant de x à y alors

$$f(x) < f(y)$$



Théorie des Graphes

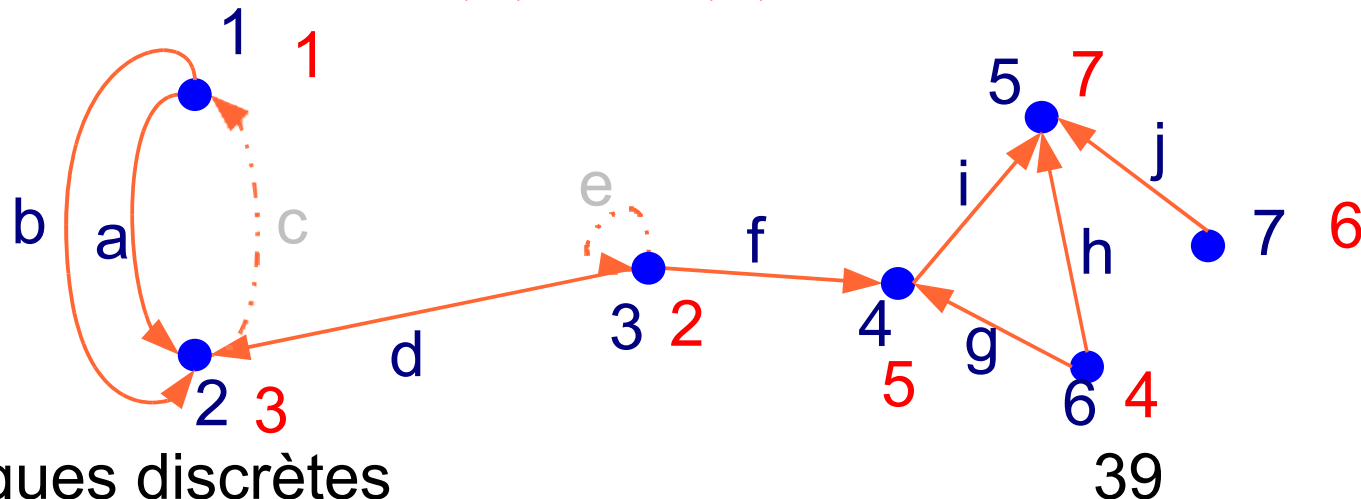
12.1 Tri topologique

Définition. Les sommets d'un graphe orienté G sont *triés topologiquement* s'il existe une bijection

$$f : X \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

telle que s'il existe un arc allant de x à y alors

$$f(x) < f(y)$$



Théorie des Graphes

12.2 Caractérisation

Proposition. sans circuit \leftrightarrow trie topologique

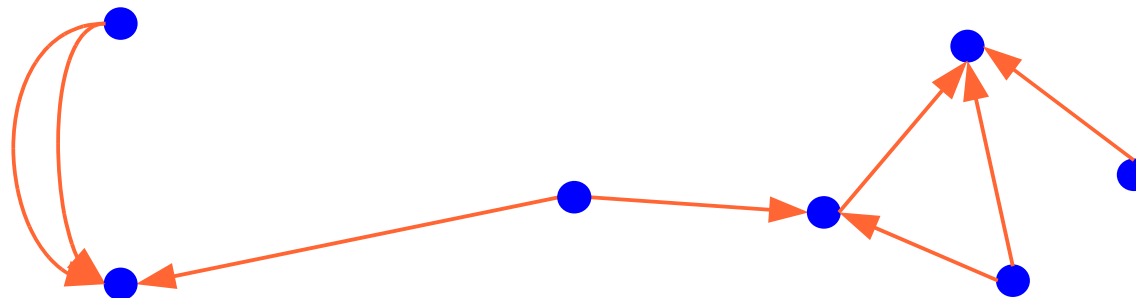
Théorie des Graphes

12.2 Caractérisation

Proposition. sans circuit \leftrightarrow trie topologique

Intuition. Imaginons un arc comme un tuyau d'eau:

Arc allant de x à y ssi x peut être représenté comme un point plus haut que y et l'eau peut couler de x vers y (de niveau plus bas)



Théorie des Graphes

12.2 Caractérisation

Proposition. sans circuit \leftrightarrow trie topologique

Intuition. Imaginons un arc comme un tuyau d'eau:

Arc allant de x à y ssi x peut être représenté comme un point plus haut que y et l'eau peut couler de x vers y (de niveau plus bas)

Trie topologique = une représentation par tuyaux d'eau est possible
pas de tuyau de bas vers haut \rightarrow sans circuit

Théorie des Graphes

12.2 Caractérisation

Proposition. sans circuit \leftrightarrow trie topologique

Intuition. Imaginons un arc comme un tuyau d'eau:

Arc allant de x à y ssi x peut être représenté comme un point plus haut que y et l'eau peut couler de x vers y (de niveau plus bas)

Trie topologique = une représentation par tuyaux d'eau est possible
pas de tuyau de bas vers haut \rightarrow sans circuit

Preuve. CN (récurrence) et CS (par l'absurde).

Théorie des Graphes

13. Arborescences

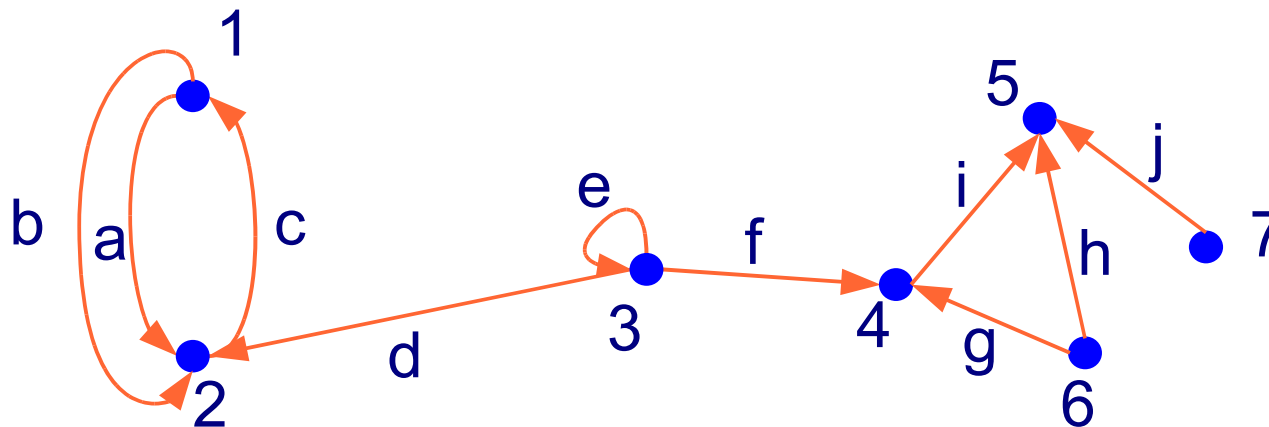
Dans un graphe orienté G ,
racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

Théorie des Graphes

13. Arborescences

Dans un graphe orienté G ,
racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

Exemple (graphe sans racine)

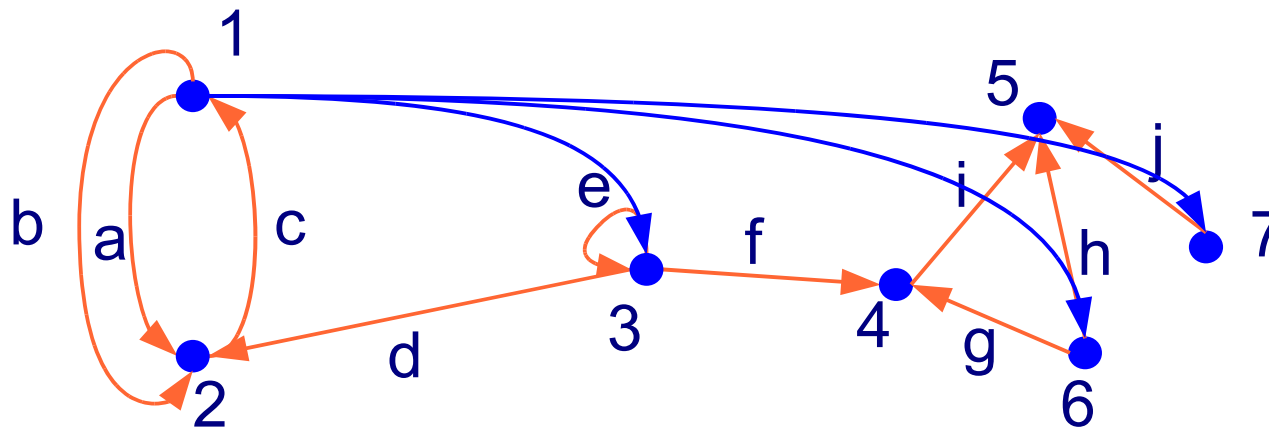


Théorie des Graphes

13. Arborescences

Dans un graphe orienté G ,
racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

Exemple



Théorie des Graphes

13. Arborescences

Dans un graphe orienté G ,

racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

arborescence = graphe orienté *admettant une racine* dont le graphe non orienté associé est un arbre

Théorie des Graphes

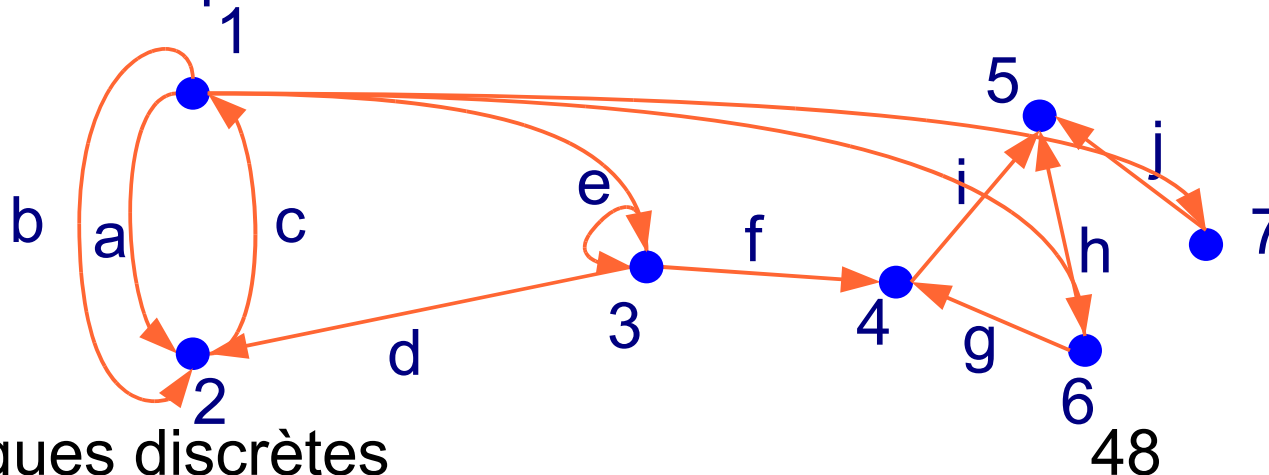
13. Arborescences

Dans un graphe orienté G ,

racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

arborescence = graphe orienté admettant une racine dont le graphe non orienté associé est un arbre

Exemple. Ce n'est pas une arborescence



Théorie des Graphes

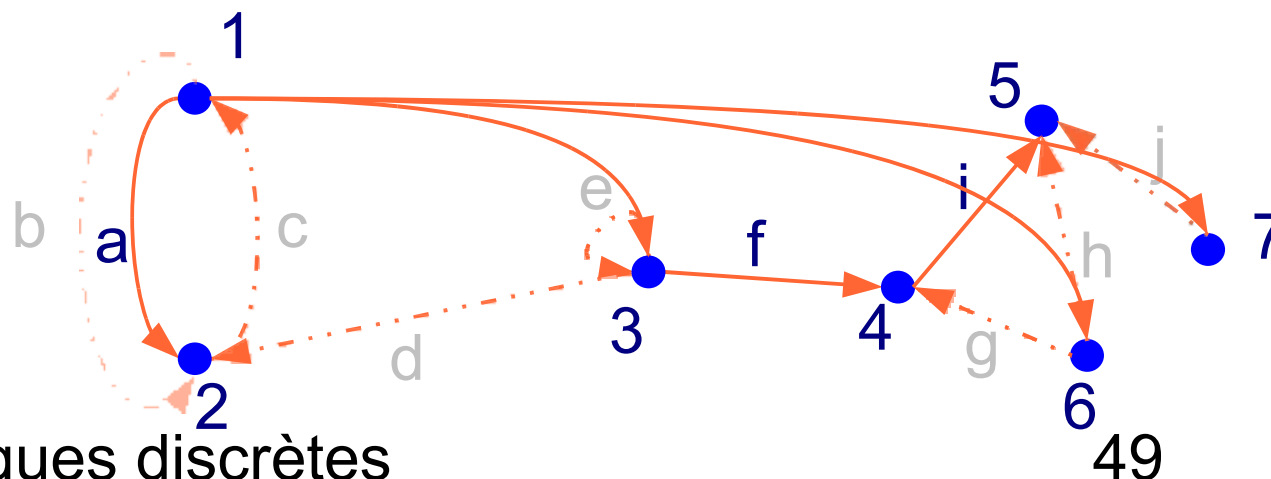
13. Arborescences

Dans un graphe orienté G ,

racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

arborescence = graphe orienté admettant une racine dont le graphe non orienté associé est un arbre

Exemple. Une arborescence



Théorie des Graphes

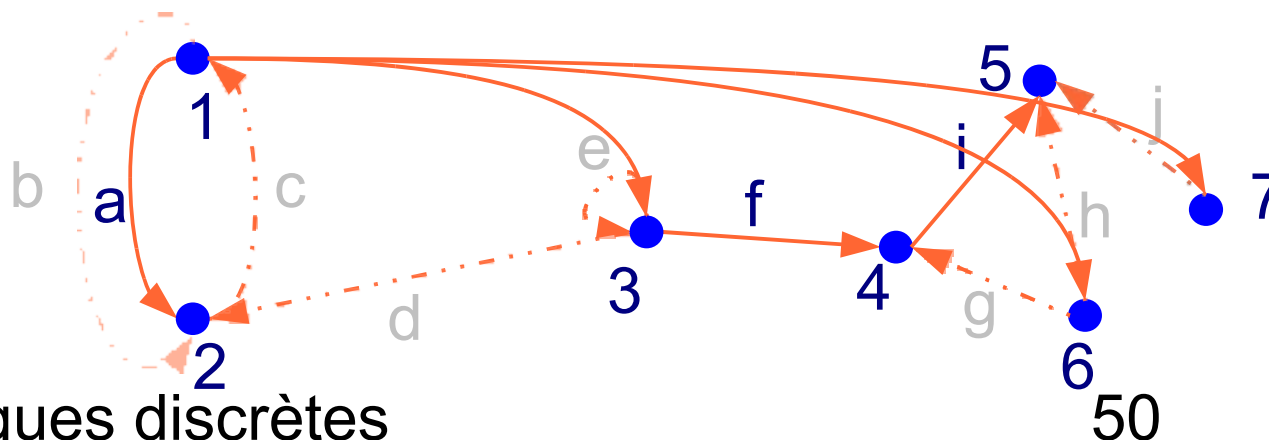
13. Arborescences

Dans un graphe orienté G ,

racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

arborescence = graphe orienté *admettant une racine* dont le graphe non orienté associé est un arbre

Remarque. Une arborescence admet une seule racine.



Théorie des Graphes

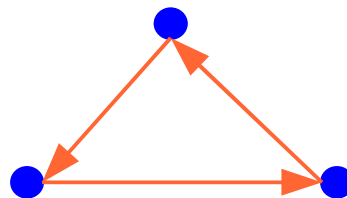
13. Arborescences

Dans un graphe orienté G ,

racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

arborescence = graphe orienté *admettant une racine* dont le graphe non orienté associé est un arbre

Remarque. Une arborescence admet une seule racine. (Mais en générale, un graphe orienté peut avoir plusieurs racines)



Théorie des Graphes

13. Arborescences

Dans un graphe orienté G ,

racine = sommet r t.q. il existe un chemin de r à x pour tout sommet x de G

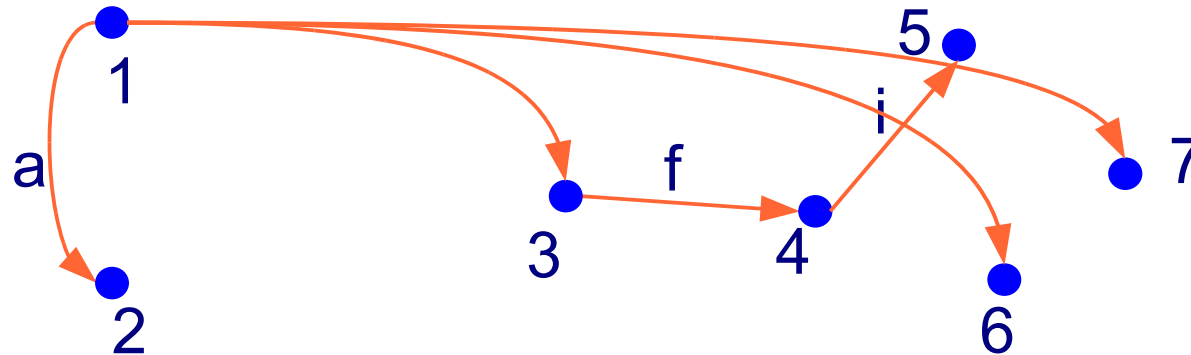
arborescence = graphe orienté *admettant une racine* dont le graphe non orienté associé est un arbre

Remarque. Une arborescence admet une seule racine. (Mais en générale, un graphe orienté peut avoir plusieurs racines)

Preuve. Par l'absurde.

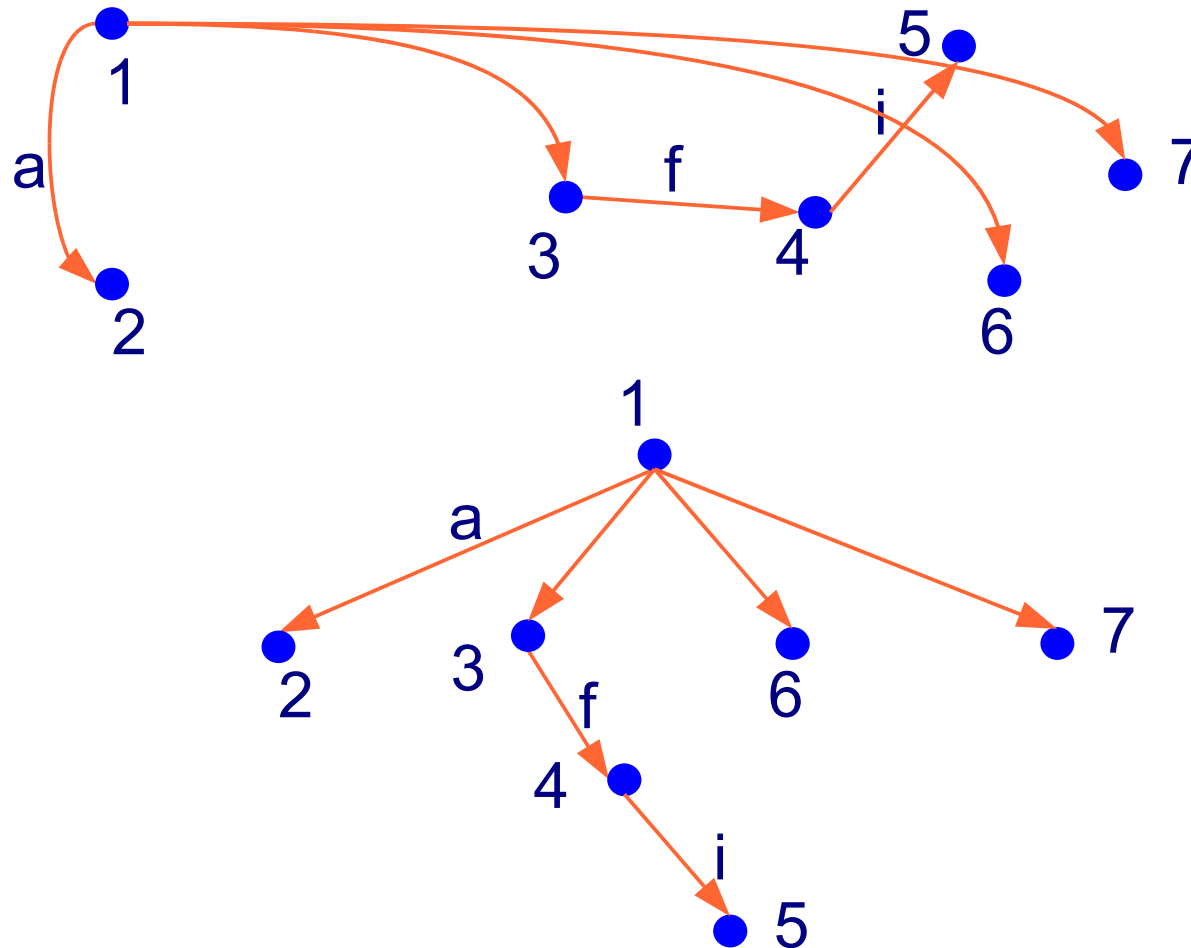
Théorie des Graphes

13.1 Représentation des arborescences



Théorie des Graphes

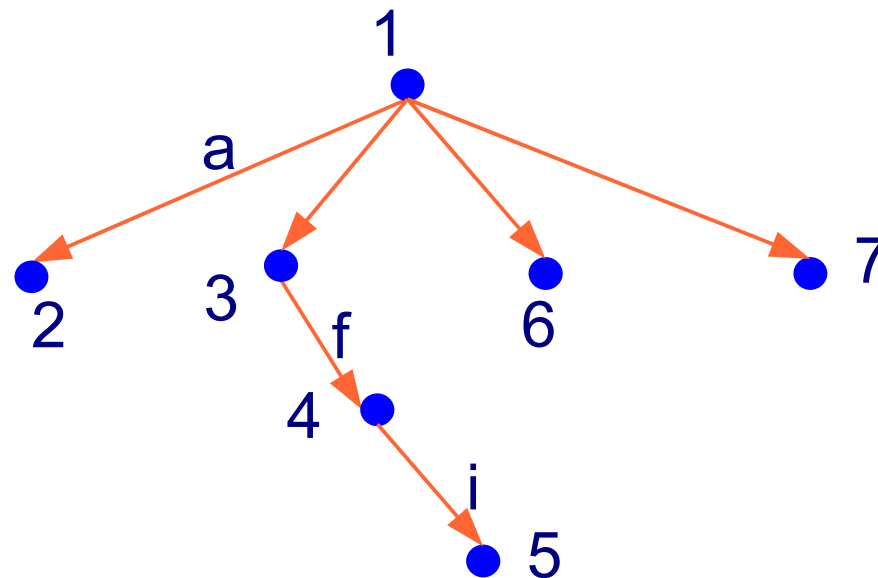
13.1 Représentation des arborescences



Théorie des Graphes

13.2 Terminologie dans une arborescence

*nœud, feuille, profondeur, niveau de profondeur,
fils (enfant), père (parent), frère, descendant*

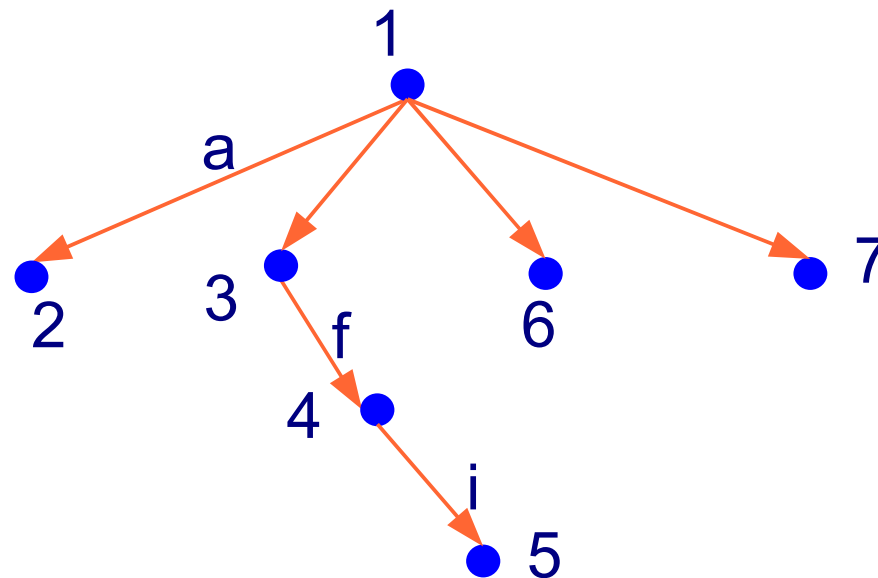


Théorie des Graphes

13.2 Terminologie dans une arborescence

*nœud, feuille, profondeur, niveau de profondeur,
fils (enfant), père (parent), frère, descendant*

nœuds : tous les sommets 1, 2, ... 7

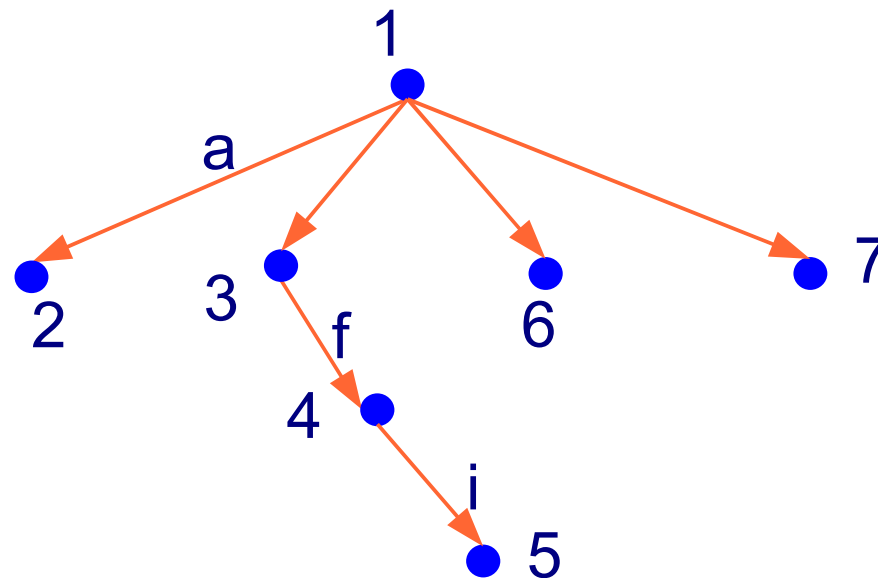


Théorie des Graphes

13.2 Terminologie dans une arborescence

*nœud, feuille, profondeur, niveau de profondeur,
fils (enfant), père (parent), frère, descendant*

feuilles : les sommets puits (2, 5, 6, 7)

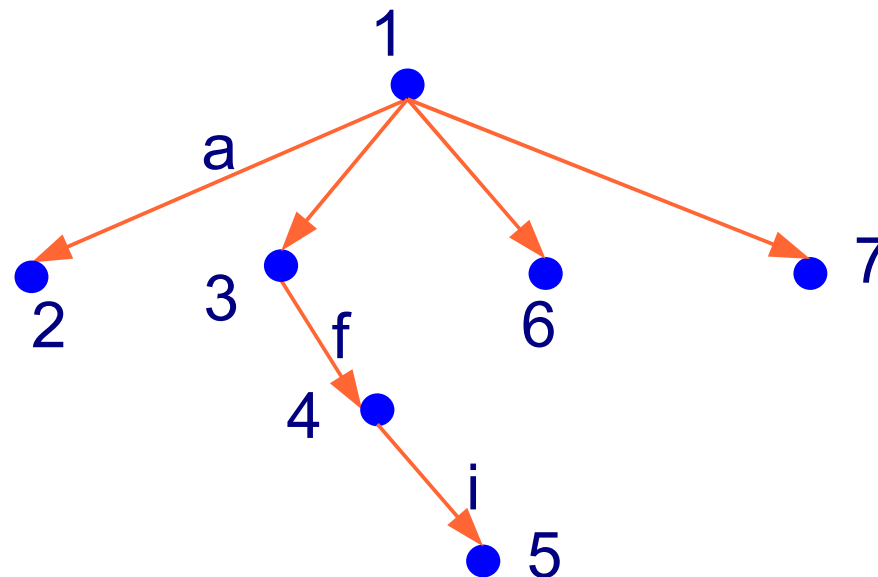


Théorie des Graphes

13.2 Terminologie dans une arborescence

nœud, feuille, profondeur, niveau de profondeur, fils (enfant), père (parent), frère, descendant

profondeur, niveau : la distance entre un sommet et la racine.
Par exemple, les sommets **2, 3, 6, 7** sont de profondeur 1 (niveau 1)

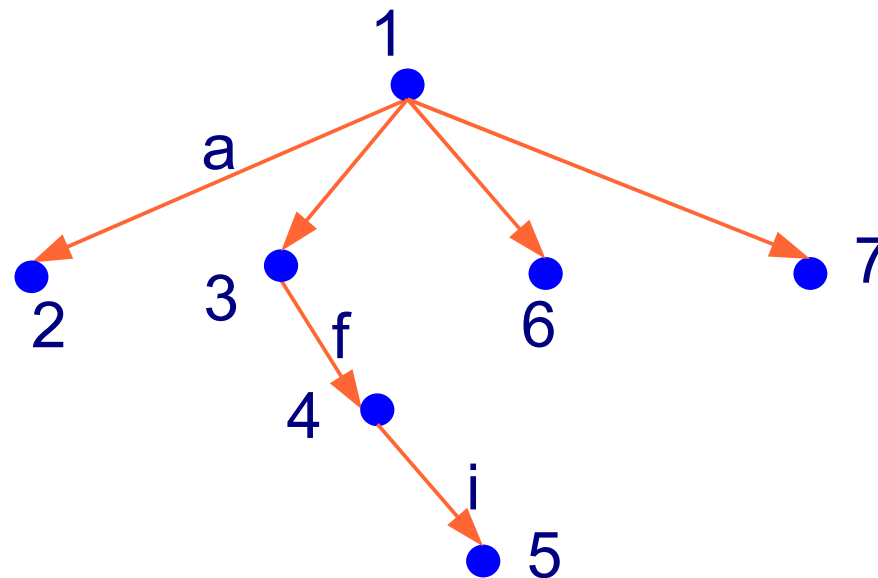


Théorie des Graphes

13.2 Terminologie dans une arborescence

*nœud, feuille, profondeur, niveau de profondeur,
fils (enfant), père (parent), frère, descendant*

fils, père : si l'on a un arc (x, y) alors y est un fils de x et x est le père de y . Par exemple, 4 est un fils de 3 et 3 est le père de 4.

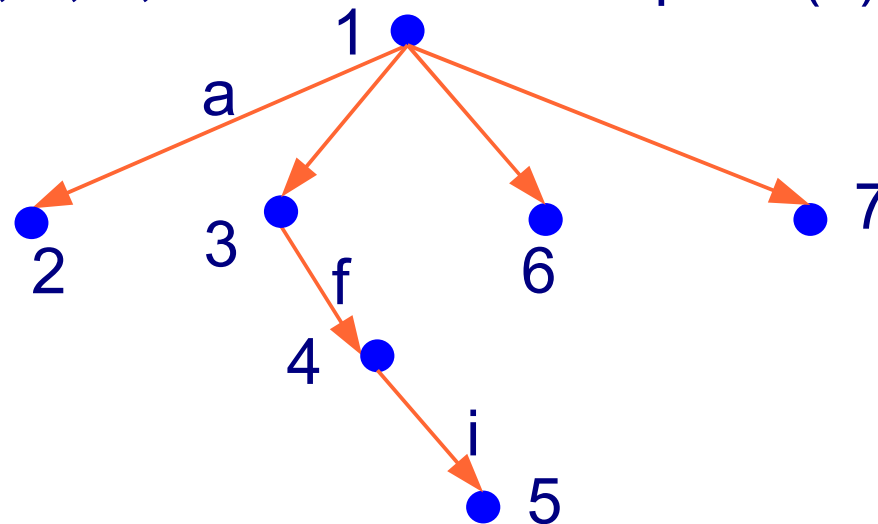


Théorie des Graphes

13.2 Terminologie dans une arborescence

*nœud, feuille, profondeur, niveau de profondeur,
fils (enfant), père (parent), frère, descendant*

fils, père : si l'on a un arc (x, y) alors y est un fils de x et x est le père de y . Par exemple, 4 est un fils de 3 et 3 est le père de 4. Dans cet exemple, 2, 3, 6 et 7 ont même père (1).

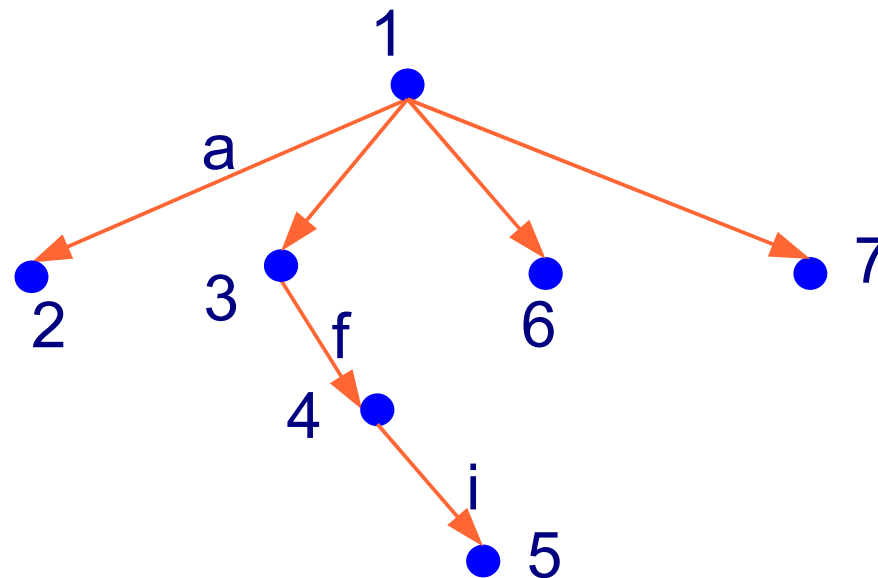


Théorie des Graphes

13.2 Terminologie dans une arborescence

nœud, feuille, profondeur, niveau de profondeur, fils (enfant), père (parent), frère, descendant

frères : x et y sont dits frères s'ils ont même père.
Par exemple, 2, 3, 6 et 7 sont des frères.



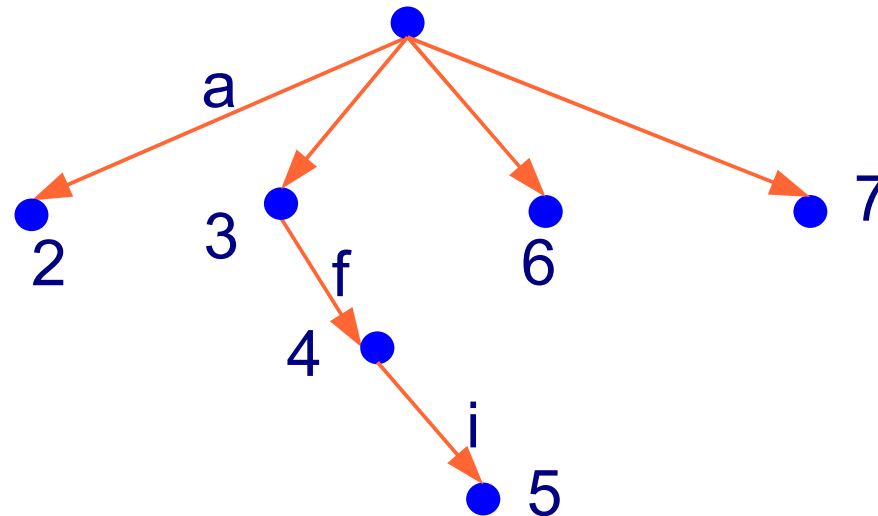
Théorie des Graphes

13.2 Terminologie dans une arborescence

*nœud, feuille, profondeur, niveau de profondeur,
fils (enfant), père (parent), frère, descendant*

descendant : x est un descendant de y s'il existe un chemin allant de x à y .

Par exemple, 4 et 5 sont les descendants de 3.



Théorie des Graphes

13.3 Caractérisations des arborescences

Les conditions suivantes pour un graphe orienté G sont équivalentes

1. G est une arborescence
2. G a une racine & le graphe non orienté associé est acyclique
3. G a une racine & $m=n-1$
4. Il existe un sommet r t.q. pour tout autre sommet x il existe un chemin unique de r à x & pas de boucle à r
5. G est connexe, et la condition des degrés intérieur : il existe un sommet r t.q. $d^-(r) = 0$ et $d^-(x) = 1$ pour les autres sommets x
6. Le graphe non orienté associé est acyclique & la condition des degrés intérieurs
7. G est sans circuit & la condition des degrés intérieur

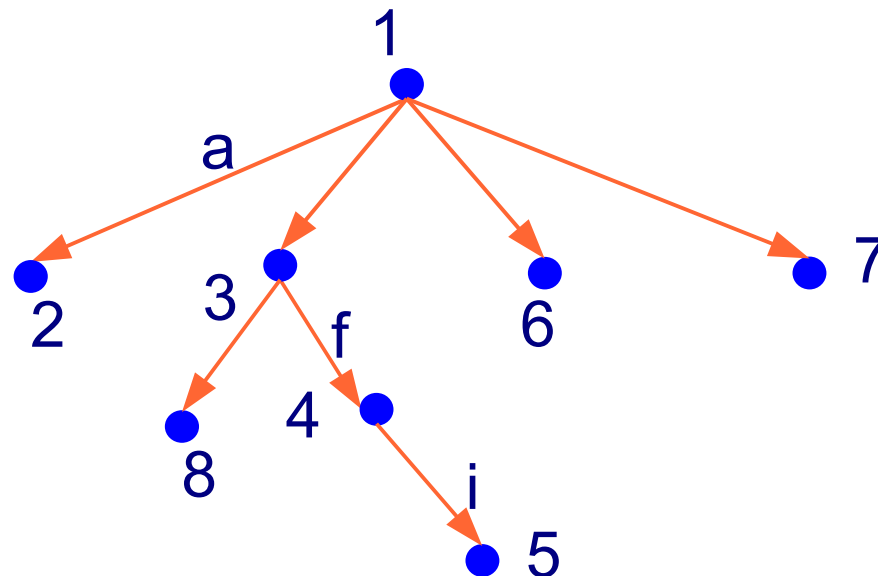
Théorie des Graphes

13.4 Sous-arborescences

Soient une arborescence T et un sommet s

La *sous-arborescence de racine s* = sous-graphe engendré de T par s et tous ses descendants

Exemple.



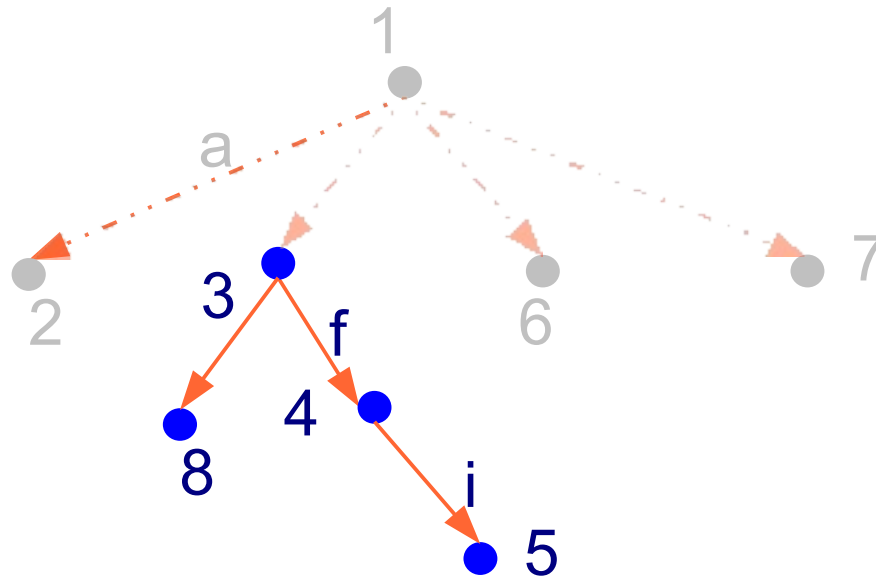
Théorie des Graphes

13.4 Sous-arborescences

Soient une arborescence T et un sommet s

La *sous-arborescence de racine s* = sous-graphe engendré de T par s et tous ses descendants

Exemple.



Théorie des Graphes

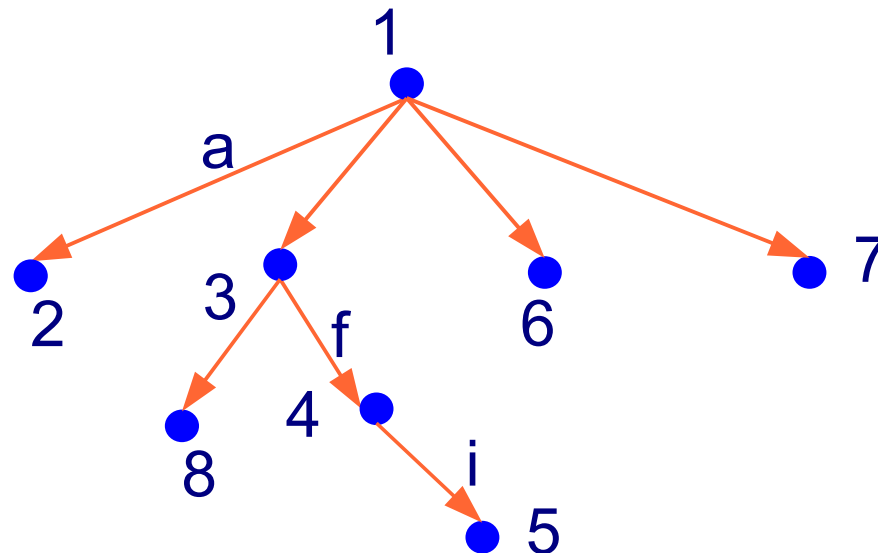
13.5 Arborescences ordonnées

Soient une arborescence T .

Si l'on définit un ordre total sur l'ensemble des fils de chaque sommet, on obtient une arborescence ordonnée.

Dans ce cas, on parle du *fils premier* et du *frère suivant* d'un sommet

Exemple.



13.6 Forêts orientées

Example.

