

Séries génératrices

Correction

April 16, 2008

Exercice 1 :

Premiere méthode: série définie sur \mathbb{Z} (méthode du cours):

- On pose $S(X) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n X^n$.
- Pour pouvoir définir la suite sur \mathbb{Z} , il faut modifier la suite: $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + [n = 0]$ avec $u_n = 0$ si $n < 0$.
- Donc, on obtient $S(X) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((3u_{n-1} - 2u_{n-2} + [n = 0]) X^n) = 3 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{n-1} X^n \right) - 2 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{n-2} X^n \right) + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} [n = 0] X^n \right) = 3X S(X) - 2X^2 S(X) + 1$

Deuxieme méthode: série définie sur \mathbb{N} (trouvée dans certains livres):

- On pose $S(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$.
- Avec les hypotheses sur u_n , on peut ecrire $S(X) = 1 + 3X + \sum_{n \geq 2} (3u_{n-1} - 2u_{n-2}) X^n$.
- Donc $S(X) = 1 + 3X + 3 \sum_{n \geq 2} (u_{n-1} X^n) - 2 \sum_{n \geq 2} (u_{n-2} X^n)$ et donc $S(X) = 1 + 3X + 3X \sum_{n \geq 2} (u_{n-1} X^{n-1}) - 2X^2 \sum_{n \geq 2} (u_{n-2} X^{n-2})$
- En réindexant un peu pour se ramener à $S(X)$ dans le membre de droite, on tombe sur la relation $S(X) = 1 + 3X + 3X(S(X) - 1) - 2X^2 S(X)$.

Fin identique:

- On a $S(X) = \frac{1}{2X^2 - 3X + 1}$. Les zeros de $2X^2 - 3X + 1$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Donc on a $S(X) = \frac{1}{(1-X)(1-2X)}$. Donc on en deduit que S est égal à une certaine fraction rationnelle: $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $S(X) = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{1-2X}$.
- On decompose S en éléments simples (identification ou méthode des pôles) et on trouve $S(X) = -\frac{1}{1-X} + \frac{2}{1-2X}$. Par la méthode des pôles ça fait:
 - Pôle 1: On multiplie des 2 cotés par $\frac{1}{1-X}$. On obtient l'égalité $\frac{1}{1-2X} = a + \frac{(1-X)b}{1-2X}$. On remplace maintenant X par 1. On obtient $a = -1$.

- Pôle 1/2: On multiplie des 2 cotés par $\frac{1}{1-2X}$. On obtient l'égalité $\frac{1}{1-X} = \frac{a(1-2X)}{1-X} + b$. On remplace maintenant X par 1/2. On obtient $b = 2$.
- On développe les éléments simples en série génératrice et en utilisant la linéarité de la somme dans l'autre sens, on trouve $S(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (2^{n+1} - 1)X^n$.
- On identifie les coefficients devant les puissances identiques dans les deux écritures de $S(X)$ et on trouve $u_n = 2^{n+1} - 1$ pour $n \geq 0$.

Exercice 2 :

On pose $\forall n \geq 0, a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$. On considère $S = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$.

On a $S(z) = \left(\sum_{n \geq 0} 2^n z^n \right) + 5 \cdot \left(\sum_{n \geq 0} 3^n \cdot z^n \right) = \frac{1}{1-2z} + 5 \frac{1}{1-3z} = \frac{6-13z}{(1-2z)(1-3z)}$

Exercice 3 :

- $u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + (-1)^n$
 - (Sur \mathbb{Z} , on peut utiliser: $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + (-1)^n + [n = 1]$)
 - On sait que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n X^n = \frac{1}{1+X}$. Donc $\sum_{n \geq 2} (-1)^n X^n = \frac{1}{1+X} - (1 - X)$.
 - Donc on obtient $S(X) = 1 + X + X(S(X) - 1) + 2X^2 S(X) + \frac{1}{1+X} - 1 + X \Rightarrow S(X) \times (1 - X - 2X^2) = \frac{1}{1+X} + X \Rightarrow S(X) \times (1 - X - 2X^2) = \frac{1+X+X^2}{1+X}$
 - En développant on obtient $S(X) = \frac{X^2+X+1}{(x+1)^2(1-2x)}$
 - Avec la technique simples du cours, pour trouver les coefficients a, b et c tel que $S(X) = \frac{a}{(X+1)} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{(1-2X)}$:
 - (a) Pole -1 : $\frac{X^2+X+1}{(1-2x)} = (X+1)a + b + \frac{(X+1)^2 c}{(1-2X)}$, donc $b = 1/3$.
 - (b) Pole 1/2 : $\frac{X^2+X+1}{(X+1)^2} = \frac{(1-2X)a}{(X+1)} + \frac{(1-2X)b}{(X+1)^2} + c$, donc $c = 7/9$.
 - Pour trouver a , on identifie : $X^2 + X + 1 = a(X+1)(1-2X) + (1-2X)\frac{1}{3} + (X+1)^2 \frac{7}{9}$. Il y a trois équations (une identification par degré), si on prend la plus simple (degré 0), on obtient : $1 = a + \frac{1}{3} + \frac{7}{9}$, finalement $a = -1/9$. On peut vérifier avec l'équation de degré 2 (aussi simple que le degré 0, c'est le degré 1 le moins direct) : $1 = -2a + \frac{7}{9}$.
 - Finalement : $S = -\frac{1}{9(X+1)} + \frac{1}{3(X+1)^2} + \frac{7}{9(1-2X)}$.
 - On remplace par les séries: $S = -\frac{1}{9} \times \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \times \sum_{n \geq 0} (n+1) (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \times \sum_{n \geq 0} 2^n x^n$
 - On en déduit que $u_n = \frac{7}{9} \times 2^n + (-1)^n \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9} \right)$

- $u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \geq 2, u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + n - 1$

- (Sur \mathbb{Z} , on peut utiliser: $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + n - 1 - 3[n = 1] + 2[n = 0]$)
- On $S(x) - 1 - x = 4 \sum_{n \geq 2} u_{n-1} x^n - 4 \sum_{n \geq 2} u_{n-2} x^n + \sum_{n \geq 2} (n-1) x^n$. Comme $\sum_{n \geq 2} (n-1) x^n = x^2 \times \sum_{n \geq 0} n x^{n-1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$. On a donc $S(x) - 1 - x = 4x(S(x) - 1) - 4x^2 S(x) + \frac{x^2}{(1-x)^2}$
- On a finalement $S(X) = \frac{x^2+(1-3x)(1-x)^2}{(1-x)^2(1-2x)^2}$

- On en résolvant par pole on finira par trouver que $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{2(1-2x)^2} - \frac{5}{2(1-2x)}$
 - Ainsi au final, $u_n = n + 3 + (n+1)2^{n-1} - 5 \times 2^{n-1}$
3. $u_0 = 1, \forall n \geq 1, u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \dots + nu_0$
- Sur \mathbb{Z} , on peut utiliser: $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \dots + nu_0 + [n = 0]$
 - Donc on a $S(x) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (u_{n-1} + 2u_{n-2} + \dots + nu_0)x^n = 1 + xS(x) + 2x^2S(x) + \dots + nx^nS(x) + \dots$ et donc $S(x) = 1 + x \times S(x) (x + 2x^2 + \dots + nx^n) = 1 + x \times S(x) \times \frac{1}{(1-x)^2}$.
On obtient finalement que $S(x) = 1 + \frac{x}{1-3x+x^2}$
 - Correspond à la suite de Fibonacci: $u_0 = 1$ et $u_n = F_{2n}$ pour $n > 0$.
 - En effet, vu en cours que $\sum_n F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$. Or, $\sum_n F_{2n} x^{2n} = \frac{1}{2} \times (\sum_n F_n x^n + \sum_n F_n (-x)^n) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{1-x-x^2} + \frac{-x}{1+x-x^2} \right) = \frac{x^2}{1-3x^2+x^4}$. En faisant un changement de variable, on a que $\sum_n F_{2n} x^2 = \frac{x}{1-3x+x^2}$

Exercice 4 :

Cela revient à chercher le nombre de solution l'équation $p + 5q = 100$. Soient les séries:

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + x + x^2 + \dots + x^p + \dots \\ w(x) &= 1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{5q} + \dots \end{aligned}$$

On a:

$$(uw)(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p+5q=n} x^p x^{5q} \right)$$

Par conséquent, le nombre de solution de $p + 5q = n$ est le coefficient de x^n dans la série $v(x) = u(x)w(x)$. Or, ici on a $u(x) = \frac{1}{1-x}$ et $w(x) = \frac{1}{1-x^5}$. Donc:

$$v(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^5)}$$

On remarque que $(1-x^5) = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$. On peut simplifier $v(x)$ pour obtenir:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1+x+x^2+x^3+x^4}{(1-x^5)^2} \\ &= (1+x+x^2+x^3+x^4) \sum_{n \geq 0} (n+1) x^{5n} \end{aligned}$$

Le nombre de façon de faire de la monnaie de n euros est donc le coefficient de x^n dans la série $v(x)$. Soit n quelconque, on a (de manière unique) $n = 5k + r$ avec $0 \leq r \leq 4$. et le coefficient x^{5k+r} dans $v(x)$ est alors $k+1$.

Pour notre exemple, $k = 20, v_{20} = 21$ façons de faire de la monnaie de 1 euro avec des pièces de 1 cent et 5 cents.