

Théorie des graphes et applications

avec exercices et problèmes

J.C. Fournier

4 janvier 2006

*à Hugo, Eliott, Mathieu,
Elise, Aurélie, Antonin,
et suivants...*

Table des matières

Introduction	9
Chapitre 1. Généralités	13
1.1. Origine de la notion de graphe	13
1.2. Définition des graphes	17
1.3. Sous-graphes	21
1.4. Chaînes et cycles	22
1.5. Degrés	27
1.6. Connexité	29
1.7. Graphes bipartis	30
1.8. Aspects algorithmiques	32
1.9. Exercices	36
Chapitre 2. Arbres	39
2.1. Définitions et propriétés	39
2.2. Arbres couvrants	44
2.3. Problème de l'arbre couvrant minimum	49
2.4. Connectivité	54
2.5. Exercices	62
Chapitre 3. Colorations	67
3.1. Problèmes de colorations	67
3.2. Colorations d'arêtes	67
3.3. Aspects algorithmiques	69
3.4. Le problème de l'emploi du temps	71
3.5. Exercices	78

Chapitre 4. Graphes orientés	81
4.1. Définitions et généralités	81
4.2. Graphes orientés sans circuits	89
4.3. Arborescences	91
4.4. Exercices	95
Chapitre 5. Recherche arborescente	97
5.1. Parcours d'une arborescence	97
5.2. Optimisation d'une suite de décisions	103
5.3. Parcours d'un graphe orienté	109
5.4. Exercices	118
Chapitre 6. Chemins optimaux	121
6.1. Problèmes de distances et de plus courts chemins	121
6.2. Graphes non valués, parcours en largeur	123
6.3. Cas des graphes sans circuits	128
6.4. Application à l'ordonnancement	130
6.5. Cas des longueurs positives	136
6.6. Autres cas	144
6.7. Exercices	146
Chapitre 7. Couplages	151
7.1. Couplages et chaînes alternées	151
7.2. Couplages dans les graphes bipartis	154
7.3. Problème de l'affectation	158
7.4. Problème de l'affectation optimale	164
7.5. Exercices	174
Chapitre 8. Flots	177
8.1. Flots dans les réseaux de transport	177
8.2. Théorème du flot maximum	181
8.3. Algorithme du flot maximum	185
8.4. Flots avec stocks et demandes	193
8.5. Revisites de théorèmes	196
8.6. Exercices	200

Chapitre 9. Tournées eulériennes	201
9.1. Chaînes et cycles eulériens	201
9.2. Algorithmes	205
9.3. Problème du postier chinois	210
9.4. Exercices	217
Chapitre 10. Tournées hamiltonniennes	219
10.1. Cycles hamiltoniens	219
10.2. Le problème du voyageur de commerce	222
10.3. Approximation d'un problème difficile	225
10.4. Approximation du PVC géographique	227
10.5. Exercices	239
Chapitre 11. Représentations planes	241
11.1. Graphes planaires	241
11.2. Autres représentations des graphes	247
11.3. Exercices	249
Chapitre 12. Problèmes commentés	251
12.1. Problème 1 : une démonstration de k -connexité	251
12.2. Problème 2 : une application à la compilation	253
12.3. Problème 3 : noyaux dans un graphe	255
12.4. Problème 4 : couplage dans un graphe biparti régulier	258
12.5. Problème 5 : théorème de Birkhoff-Von Neumann	259
12.6. Problème 6 : couplages et pavages	261
12.7. Problème 7 : exploitation d'une mine à ciel ouvert	263
Annexe 1. Expression des algorithmes	267
Annexe 2. Bases de la théorie de la complexité	273
Bibliographie	285
Index	287

Introduction

La notion de graphe est relativement récente puisqu'elle n'est apparue formellement qu'au cours du XX^e siècle. Mais elle est aujourd'hui devenue indispensable dans de nombreux domaines, notamment en informatique fondamentale et appliquée, en optimisation, en complexité algorithmique. L'étude des graphes et de leurs applications est donc l'occasion d'aborder des questions très diverses, dont les applications sont nombreuses. C'est ainsi qu'on développera par exemple les méthodes d'ordonnancement de tâches à partir des chemins optimaux dans les graphes, ou encore des propriétés de réseaux de communication à propos de la connectivité des graphes. Historiquement, les graphes ont été en fait considérés, bien avant la lettre de la théorie, avec des problèmes célèbres comme celui des ponts de Königsberg (présenté au chapitre 9).

Cet ouvrage étudie les principaux aspects de la théorie des graphes, avec surtout des applications très significatives. Par son contenu, il permet de viser les niveaux licence et master d'un cursus LMD, pour lequel on y trouvera aisément la matière pour un ou plusieurs modules. Il demande peu de prérequis, si ce n'est bien sûr une certaine familiarité avec le vocabulaire de base et le raisonnement mathématique... En retour, l'étude de cette matière nouvelle est une bonne occasion pour les élèves de tester et d'améliorer leur logique personnelle. Les graphes constituent en effet un sujet d'étude nouveau, très différent des sujets mathématiques classiquement enseignés, mais qui exige la même rigueur intellectuelle. La grande nouveauté du sujet étudié peut d'ailleurs désarçonner même de bons élèves en mathématiques, c'est dire combien l'étude de cette matière est profitable!

Ce livre conçu, comme un cours, est le fruit d'une longue expérience d'enseignement en seconds cycles de mathématiques et d'informatique, dont la maîtrise MIAGE. On y trouvera aussi de nombreux exercices et problèmes.

10 Théorie des graphes et applications

Ceux-ci sont classés en cinq niveaux qui sont, par ordre de difficulté croissante :

1. Certains points et petites démonstrations, plutôt faciles, sont laissés à la vérification du lecteur. Ils sont signalés en marge du texte par un point d'exclamation (!).
2. Dans les exercices proposés à la fin de chaque chapitre, certains sont marqués +, ce qui signale un complément utile du chapitre, éventuellement utilisé ailleurs.
3. Les exercices qui ne sont pas marqués sont d'une difficulté normale, exercices standards parmi lesquels se trouvent les plus classiques du domaine.
4. Les exercices marqués * sont plus difficiles. Ils proposent une réflexion un peu plus approfondie sur tel ou tel sujet en rapport avec le chapitre.
5. Un dernier niveau est proposé avec quelques problèmes donnés à la fin, commentés et parfois complétés d'aides pour la résolution (chapitre 12).

Quelques précisions sur la présentation de cet ouvrage. Il est divisé en chapitres, lesquels sont divisés en sections. Au sein d'une section, les différents aspects du sujet traité sont éventuellement développés dans des sous-sections. Mis à part les deux chapitres de définitions et généralités que sont le chapitre 1 pour les graphes non orientés et le chapitre 4 pour les graphes orientés, chaque chapitre développe un sujet précis accompagné d'une grande application, et se trouve donc relativement indépendant des autres chapitres. Il est ainsi possible de faire des choix pour organiser un cours. Les énoncés sont désignés suivant leur rôle et leur importance dans la théorie par la terminologie classique : théorèmes, propositions, corollaires et lemmes. Précisons cette terminologie : un *théorème* est un résultat marquant qui a une certaine portée dans la théorie, une *proposition* a moins de portée, un *corollaire* est un résultat qui se déduit directement d'un résultat principal, un *lemme* est un résultat ayant un certain caractère technique et qui généralement sert à montrer un autre résultat. La fin de la preuve d'un énoncé est signalée par le symbole \square .

Les graphes, on l'a dit, sont très utilisés dans les applications et de ce fait beaucoup de problèmes sont résolus d'une façon constructive, ce qui conduit à écrire des algorithmes qui sont éventuellement destinés à être exprimés dans tel ou tel langage de programmation. Certains de ces algorithmes ne sont pas simples, il est d'autant plus important de les exprimer de la façon la mieux

structurée possible, ce qui rendra en outre plus aisée leur écriture sous forme de programmes. Nous avons voulu dans cet ouvrage ne pas négliger et même expliciter au mieux cet aspect algorithmique, et c'est pourquoi nous expliquons avec précision, en annexe 1, le mode d'expression des algorithmes qui est suivi. Dans la même ligne, en annexe 2, nous donnons les bases de ce qui est devenu aujourd'hui indispensable de connaître dans tout développement scientifique, à savoir la théorie de la complexité algorithmique. Impossible de parler d'un algorithme sans parler de sa complexité ! Mais cela suppose une bonne connaissance au moins des classes de base de la théorie de la complexité, qui sont donc présentées dans cette annexe (l'expérience montrant qu'il est encore bien difficile de compter sur ce qui devrait normalement avoir été acquis ailleurs).

Une très large majorité des écrits sur les graphes et leurs applications sont écrits, comme dans tout domaine scientifique en général, en langue anglaise. Il est donc évidemment utile d'avoir au moins la traduction anglaise des principaux termes définis dans cet ouvrage, du moins lorsqu'il y a l'équivalent clair en anglais du mot ou de l'expression française concernée. Ces traductions sont données en note de bas de page, au fur et à mesure. Cette façon de faire nous a semblé plus pratique qu'un simple lexique, car elle permet sur le moment de donner les commentaires voulus, sachant que ces traductions, comme d'ailleurs la terminologie en général sur les graphes, ne sont pas toujours très claires dans la littérature.

Précisons enfin les deux points techniques suivants :

- Concernant le symbole d'inclusion d'ensembles, nous respectons la notation française $X \subset Y$, qui diffère de la notation anglo-saxonne $X \subseteq Y$. Ainsi dans cet ouvrage l'écriture $X \subset Y$ *n'exclut pas* le cas $X = Y$.
- Nous conservons la distinction, peut-être critiquable mais entrée dans les mœurs, entre *minimal* et *minimum*, de même entre *maximal* et *maximum*. Normalement, le mot « maximum » est un substantif et ne devrait donc pas être employé comme adjectif. Mais, par exemple, l'expression courante en théorie des graphes « couplage maximum » est à interpréter comme « couplage qui est un maximum ». Le maximum dans ce cas est à comprendre relativement au nombre d'éléments (un couplage est défini comme un ensemble d'arêtes). Dans l'autre expression « flot maximum », il faut comprendre « flot dont la valeur est un maximum », la valeur d'un flot étant un nombre qui lui est associé. En fait, « maximum » implique l'idée de supérieur ou égal à tous les autres. Par contre l'adjectif « maximal » signifie lui, comme classiquement en mathématiques, qu'il n'y a pas d'élément supérieur, pour une

relation d'ordre partielle qui sera généralement ici l'inclusion ensembliste. C'est bien le sens de *maximal* dans l'expression « couplage maximal » employée par exemple au chapitre 7.

Il existe aujourd'hui une littérature importante sur les graphes et leurs applications. Nous donnons en bibliographie à la fin quelques-unes seulement des très nombreuses références du domaine, le lecteur trouvera des bibliographies plus complètes dans certains des ouvrages cités. Certaines de ces références sont relativement anciennes, mais ce sont celles d'ouvrages qui d'une part conservent aujourd'hui tout leur intérêt scientifique et pédagogique et qui d'autre part ont nourri en leur temps notre réflexion et nous leurs en sommes redevables. Citons en particulier Bondy-Murty [3], Lovász [9], également Gondran-Minoux [6] pour les algorithmes de graphes. Mais nous voulons insister plus particulièrement sur Berge [1], ouvrage qui avec d'autres du même auteur constitue toujours une référence principale en matière de théorie des graphes, en France et à l'étranger. Quelques références plus particulières sont données par ailleurs au fil du texte.

Nous remercions Nicolas Thiant d'avoir contribué très utilement à une ultime vérification du manuscrit. Mais il reste sans doute encore des améliorations à apporter! L'auteur s'y emploiera et donnera s'il y a lieu celles-ci sur son site internet (www.ecp6.jussieu.fr/pageperso/fournier), sur lequel également toutes remarques et suggestions des lecteurs seront les bienvenues.

Pour finir, nous voulons remercier Jean-Charles Pomerol pour l'intérêt qu'il a aussitôt manifesté pour cet ouvrage et son édition chez Hermès.

Jean-Claude Fournier