

---

# Théorie des graphes

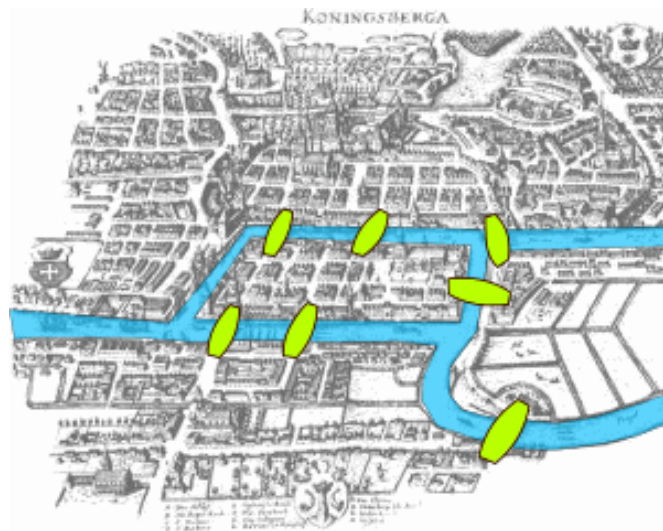
---

# Historique

- Un bon dessin vaut mieux qu'un bon discours
- Le langage des graphes essaie de mettre en pratique cette idée
- La théorie des graphes est née des préoccupations qui n'étaient pas directement des préoccupations mathématiques

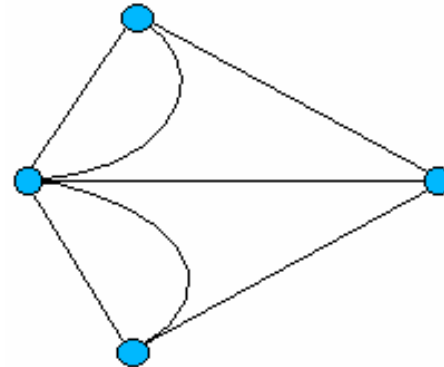
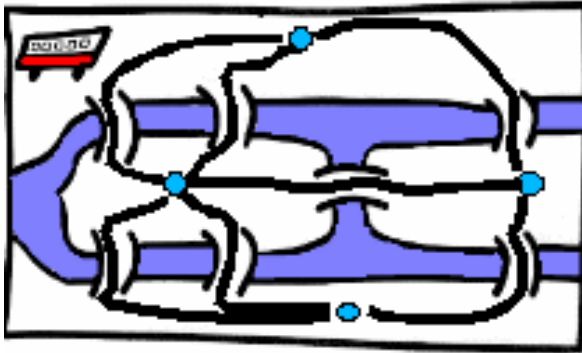
# Le problème des sept ponts de Königsberg

- Le problème des sept ponts de Königsberg est un problème mathématique
- Le problème était le suivant :
  - ▶ *Peut on se promener en passant une fois et une seule par tous les ponts ?*



# Le problème des sept ponts de Königsberg

- Cette configuration des ponts de Königsberg se modélise par un graphe



- C'est Léonhard Euler a démontré que le problème était insoluble
- cycle eulérien
  - ▶ chaîne passant par toutes les arêtes du graphe une et une seule fois, et revenant à son point de départ)

- Le problème était insoluble
- Léonhard Euler a démontré que
  - ▶ pour qu'un trajet passe
  - ▶ une fois et une seule sur chaque arête
  - ▶ et revienne au point de départ sur un graphe,
  - ▶ il faut que le graphe possède au moins un sommet de degré impair

# Historique

- Plus récemment (60,70)
  - ▶ vision plus unifiée des concepts
  - ▶ des objets
  - ▶ des résultats obtenus
- Les graphes sont devenus une branche des mathématiques discrète
- Développement des ordinateurs
  - ▶ problématique de la manipulation automatique de telles structures
    - Algorithmique des graphes

# Graphes non orientés

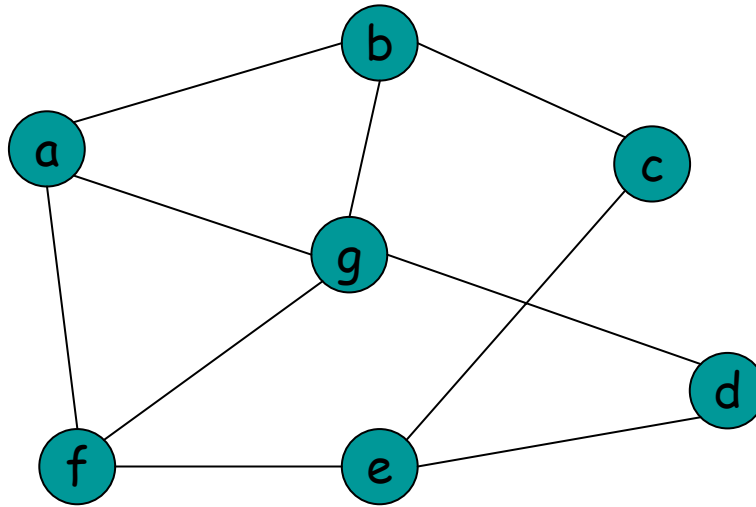
---

# Graphes non orientés

- Un graphe  $G$  est composé
  - ▶ D'un ensemble de **sommets**  $V(G)$  qui est un ensemble fini
  - ▶ D'un ensemble **d'arêtes**  $E(G)$
  - ▶  $E(G) \subseteq \{(a,b) : a \in V \text{ et } b \in V\}$
- On note  $G(V,E)$



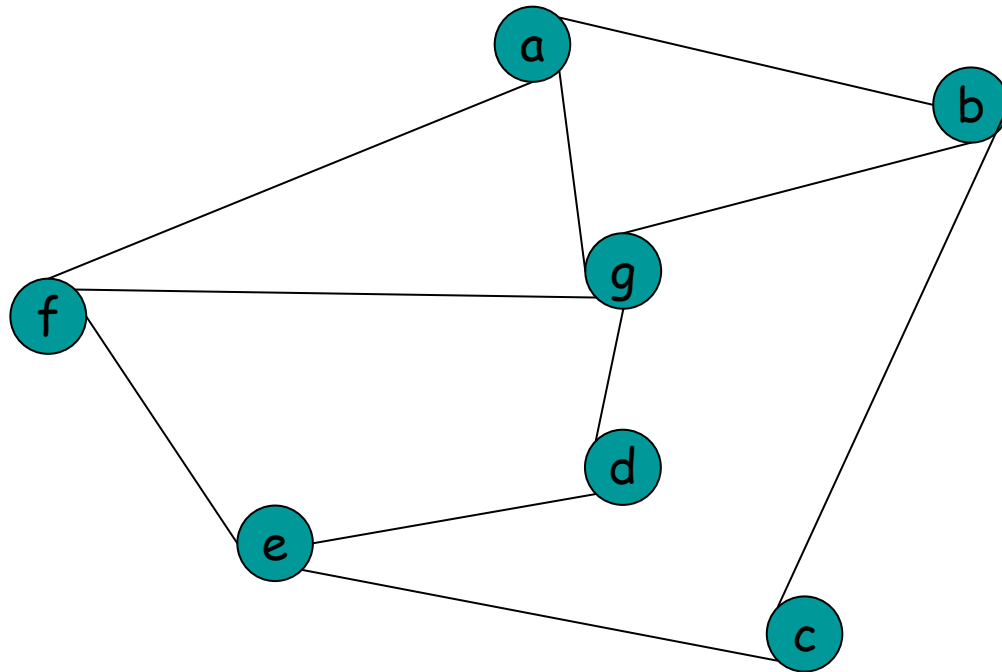
# Représentation graphique



- $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $E = \{(a, b), (a, f), (a, g), (b, c), (b, g), (c, e), (d, e), (d, g), (e, f), (f, g)\}$

# Représentation graphique

- La représentation graphique d'un graphe n'est pas unique



# Représentation graphique

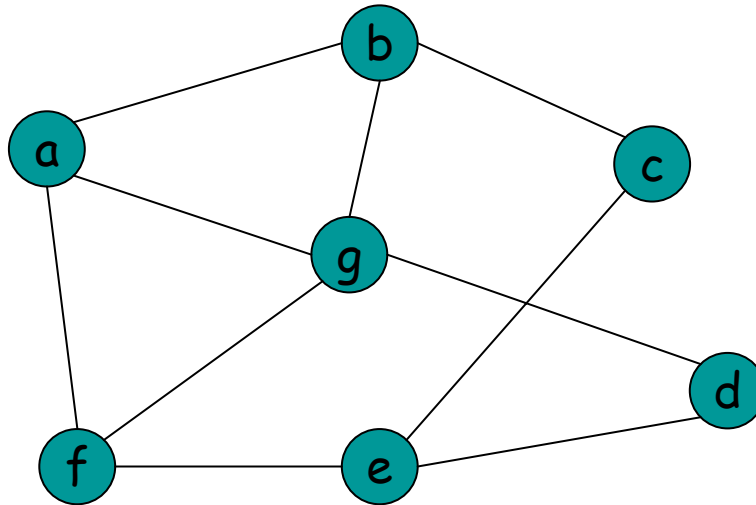
- Peu importe que les arêtes se coupent dans le plan
- On représente uniquement les relations entre les sommets
- On parlera de graphe sans boucle
  - ▶  $E(G) \subseteq \{(a,b): a \in V \text{ et } b \in V \text{ et } a \neq b\}$



# Définitions

- Soit  $G=(V,E)$  un graphe non orienté simple (sans boucle)
- Deux arêtes sont **adjacentes** si elles partagent une même extrémité

# Arêtes adjacentes exemple

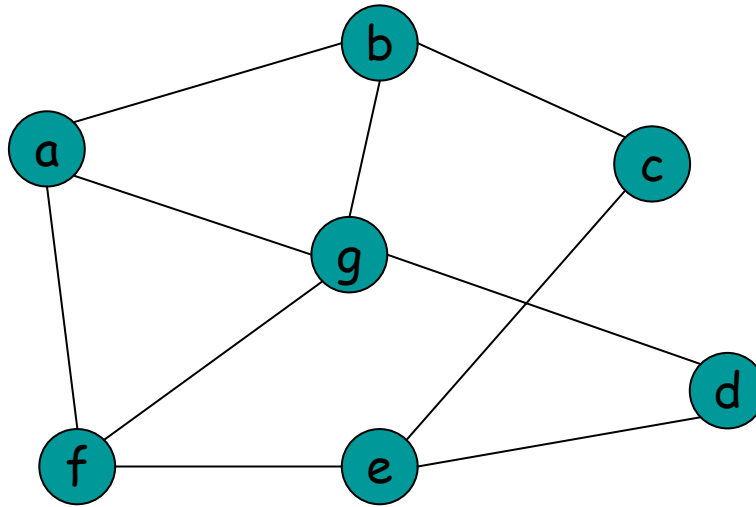


- $(a,b)$  et  $(a,f)$
- $(a,g)$  et  $(b,g)$
- $(c,e)$  et  $(c,g)$
- .....

# Définitions

- Soit  $G=(V,E)$  un graphe non orienté simple (sans boucle)
- Deux arêtes sont **adjacentes** si elles partagent une même extrémité
- L'ensemble des **voisins** d'un sommet  $u$  dans  $G$  est
  - ▶  $N(u)=\{v \in V: (u,v) \in E\}$

# Example:



- $N(a) = (b, g, f)$

- $N(b) = (a, g, c)$

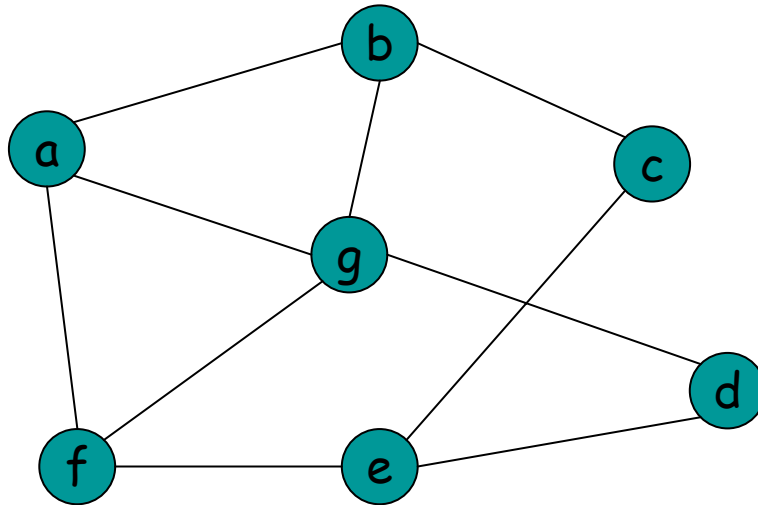
- .....

# Degré

- Le **degré** d'un sommet  $u$  dans  $G$  est
  - ▶  $d(u) = |N(u)|$
- Le **degré minimum** de  $G$  est
  - ▶  $\delta = \text{Min}\{d(u) : u \in V\}$
- Le **degré maximum** de  $G$  est
  - ▶  $\Delta = \text{Max}\{d(u) : u \in V\}$



# Example:



- $N(b) = (a, g, c)$
- $d(b) = 3$
- $\delta = 2$
- $\Delta = 4$

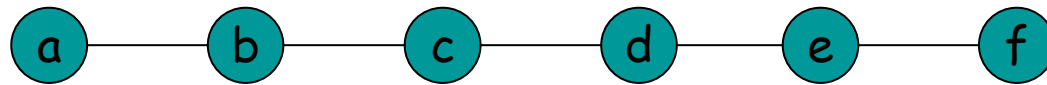
# Chemin

- Soient  $u$  et  $v$  deux sommets distincts d'un graphe  $G(V,E)$
- Un **chemin** de  $u$  à  $v$  dans  $G$  est:
  - ▶ une suite  $u_0, u_1, \dots, u_k, v$
  - ▶ de sommets 2 à 2 distincts
  - ▶ tq  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  avec  $(u_{i-1}, u_i)$
- La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arête qu'il possède

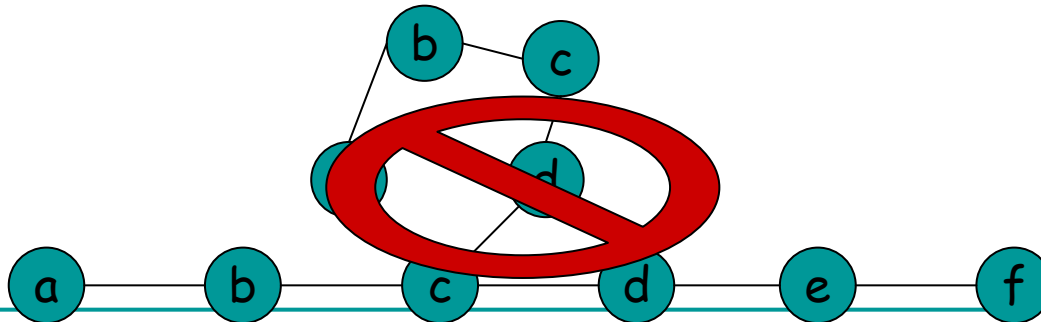
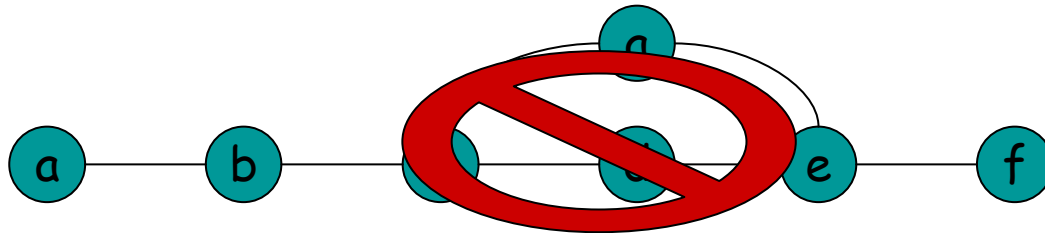
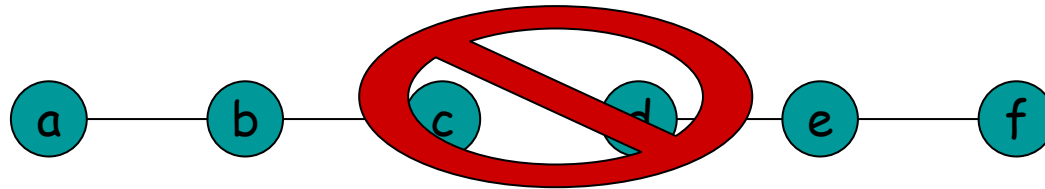
# Chemin

- $u$  est l'origine du chemin
- $v$  est l'extrémité du chemin
- Si  $k=0$  alors le chemin est de longueur 0
  - ▶ il est composé d'un seul chemin

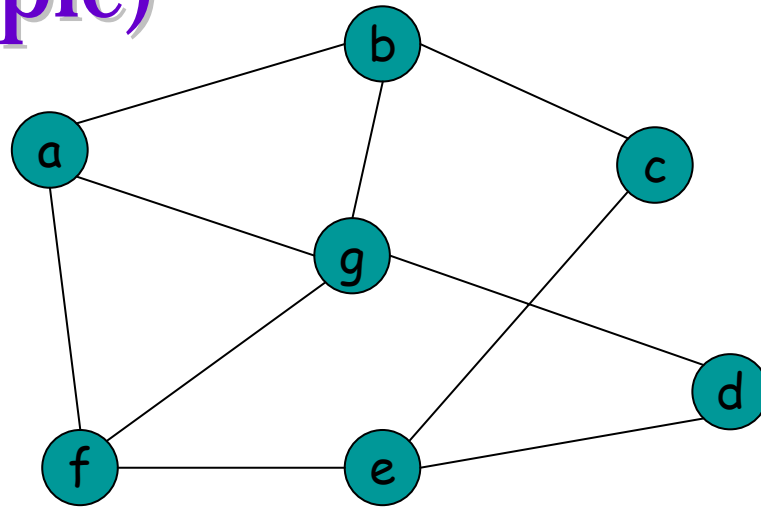
# Chemin (Exemple)



chemin de longueur 5



# Chemin (Exemple)

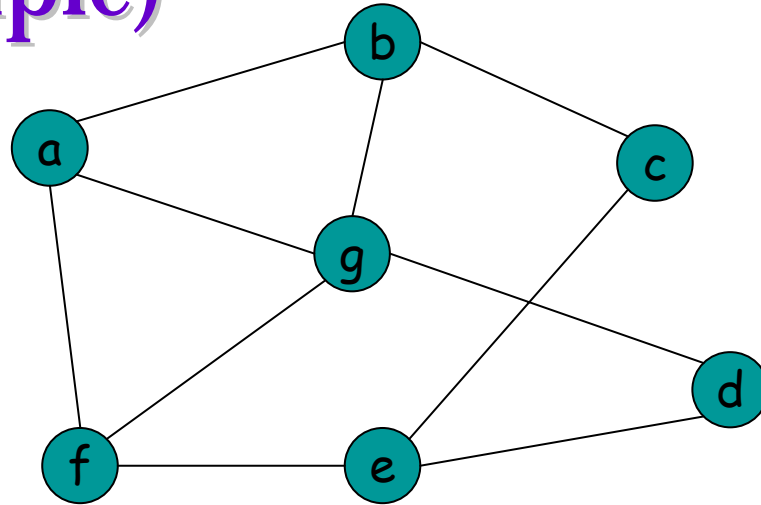


- Il y a de nombreux chemins entre a et e
  - ▶ a,b,c,e
  - ▶ a,f,g,d,e
  - ▶ c,b,a,f,g,d,e
- Tous ces chemins ne sont pas de même longueur
- La longueur la plus courte entre a et e dans  $G$ 
  - ▶ est appelé la **distance** dans  $G$

# La distance

- Soit un graphe simple non orienté  $G(V,E)$
- Soit  $u$  et  $v$  2 sommets distincts de  $V$
- Soit  $P(u,v)$  l'ensemble des chemins de  $u$  à  $v$  dans  $G$
- La distance entre  $u$  et  $v$  est
  - ▶  $d(u,v) = \text{Min}\{\text{longueur } P : P \in P(u,v)\}$

# distance (Exemple)



- La distance entre 2 sommets est le plus court des chemins qui les relie
- Si  $P(u,v)=\emptyset$  avec  $u \neq v$  on pose  $d(u,v)=+\infty$
- Ex:
  - ▶  $d(a,b)=1$
  - ▶  $d(a,e)=2$
  - ▶  $d(a,d)=2$

# Excentricité, rayon, diamètre

- Soit un graphe simple non orienté  $G(V,E)$
- $\forall u \in V$  l'excentricité de  $u$  est:
  - ▶  $\text{exc}(u) = \text{Max}\{d(u,v) : u,v \in V\}$
- le rayon de  $G$  est:
  - ▶  $R = \min\{\text{exc}(u) : u \in V\}$
- Le diamètre de  $G$  est:
  - ▶  $D = \max\{\text{exc}(u) : u \in V\}$



# Excentricité, rayon, diamètre

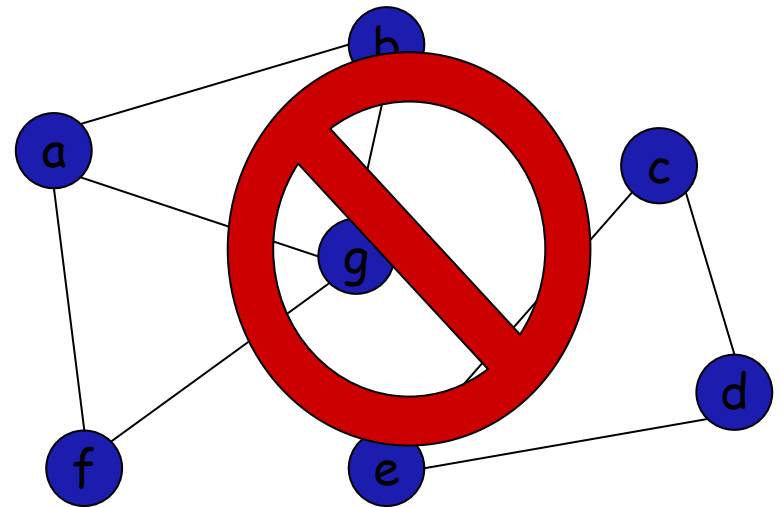
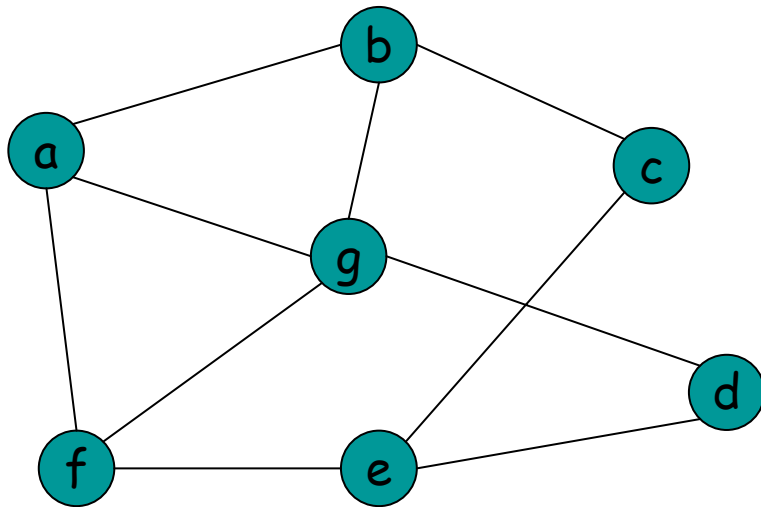
- Soit un graphe simple non orienté  $G(V,E)$
- $\forall u \in V$  l'excentricité de  $u$  est:
  - ▶  $\text{exc}(u) = \text{Max}\{d(u,v) : u,v \in V\}$
- *Autrement dit:*
  - ▶ l'excentricité de  $u$  désigne la distance qui sépare  $u$  du sommet le plus éloigné de  $u$  dans  $G$
  - ▶ l'excentricité d'un sommet est la distance maximum de ce sommet aux autres sommets

# Excentricité, rayon, diamètre

- Soit un graphe simple non orienté  $G(V,E)$
- $\forall u \in V$  l'excentricité de  $u$  est:
  - ▶  $\text{exc}(u) = \text{Max}\{d(u,v) : u,v \in V\}$
- le rayon de  $G$  est:
  - ▶  $R = \min\{\text{exc}(u) : u \in V\}$
- Le diamètre de  $G$  est:
  - ▶  $D = \max\{\text{exc}(u) : u \in V\}$
  - ▶ autrement dit
    - $D$  désigne la plus grande distance entre 2 sommets du graphe.

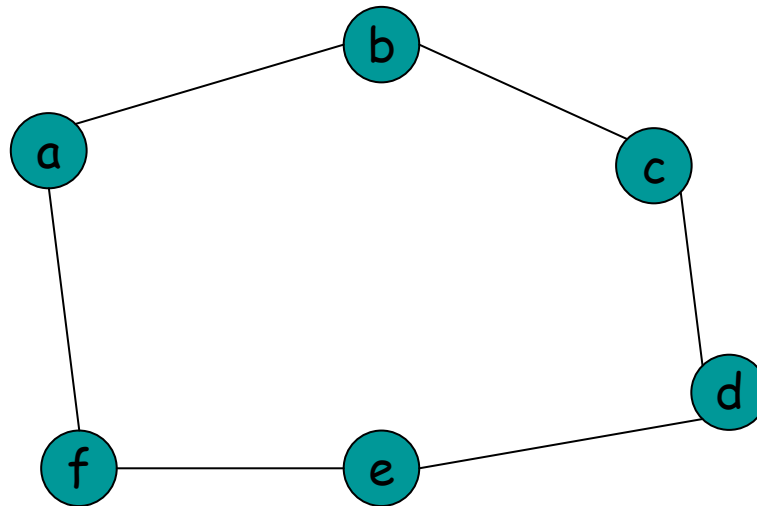
# Graphe connexe

- Un graphe est **connexe** si il existe un chemin dans  $G$  entre toutes paires de sommets (distincts)



# Cycle

- Un **cycle** est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues



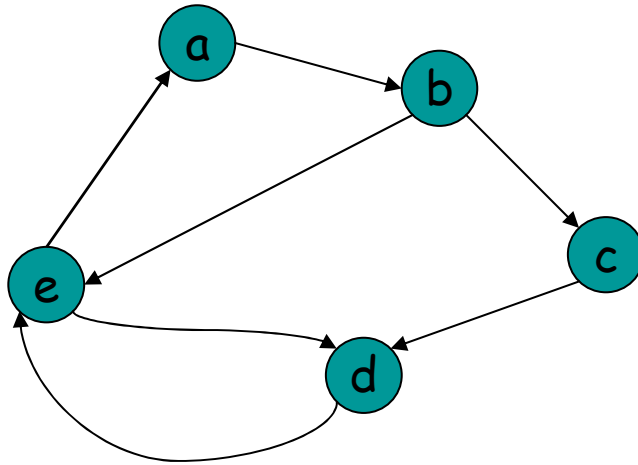
# Graphes orientés

---

# Graphes orientés

- On va décrire des relations non symétriques
- Graphe orienté  $G=(V,A)$ 
  - ▶  $V$  ensemble de sommet
  - ▶  $A$  ensemble des arcs:
    - $A \subseteq \{(u,v): u,v \in V\}$
    - $(u,v) \neq (v,u)$
    - arc de  $u$  vers  $v$

# Graphes orientés



- $V=(a,b,c,d,e)$
- $A=\{(a,b),(b,c),(b,e),(c,d),(d,e),(e,d),(e,a)\}$
- Un **arc** est noté comme un **couple** de sommet
- Un **arête** est notée comme une **paire** de sommet

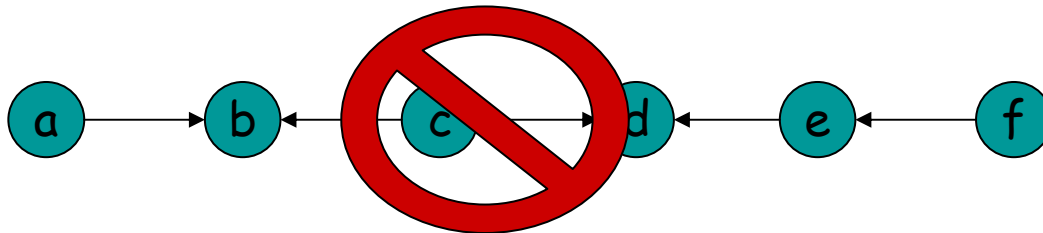
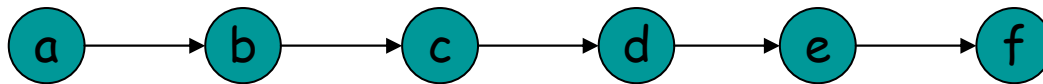
# Définitions

- $\forall u \in V$ 
  - ▶  $N^+(u) = \{v: (u,v) \in A\}$  Voisins sortants de  $u$
  - ▶  $N^-(u) = \{v: (v,u) \in A\}$  Voisins entrants de  $u$
  - ▶  $d^+(u) = |N^+(u)|$  Degré sortants de  $u$
  - ▶  $d^-(u) = |N^-(u)|$  Degré entrants de  $u$
  - ▶  $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$
- On a de même  $\delta^+, \delta, \Delta^+, \Delta$



# Chemin

- Soient  $u$  et  $v$  deux sommets distincts. Un **chemin** de  $u$  vers  $v$  dans  $G$  est une suite de sommets  $u, u_0, u_1, \dots, u_k, v$  2 à 2 distincts tq  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  avec  $(u_{i-1}, u_i) \in A$

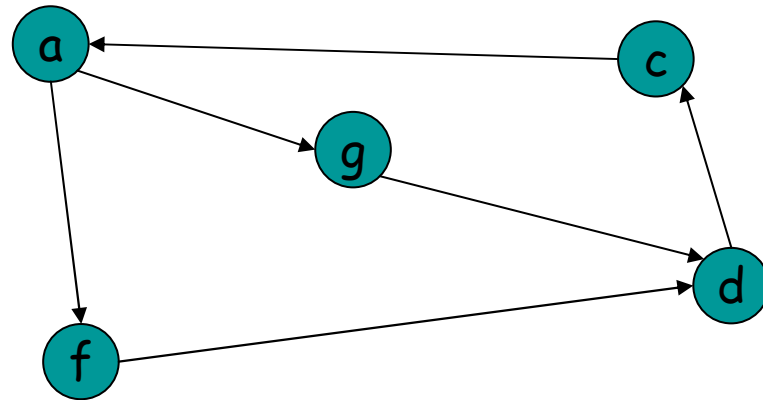


# Définitions analogues

- pour
  - ▶ distance
  - ▶ excentricité
  - ▶ Rayon
  - ▶ Diamètre
- analogue entre cycle et circuit
- un graphe orienté est **symétrique** si  
 $\forall u, v \in V, u \neq v, (u, v) \in A \text{ et } (v, u) \in A$

# Graphe fortement connexe

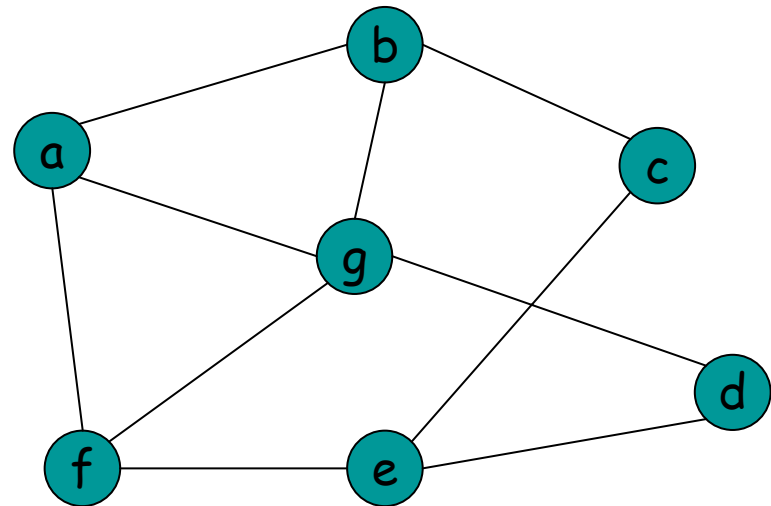
- Un graphe orienté  $G(V,A)$  est fortement connexe si pour tout couple de sommets  $u,v$  il existe un chemin de  $u$  vers  $v$



# Sous-graphe

- Soit  $G$  un graphe orienté ou pas
- Le **sous-graphe** de  $G$  engendré par  $V' \subseteq V$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $V'$  et dont les arêtes (arcs) ont leur deux extrémités dans  $V'$

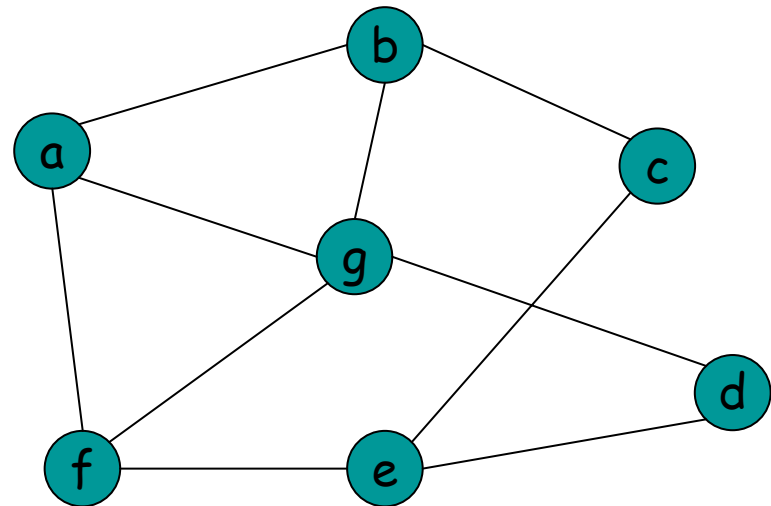
Autrement dit:  
On supprime des  
sommets  
et leurs arêtes  
incidentes



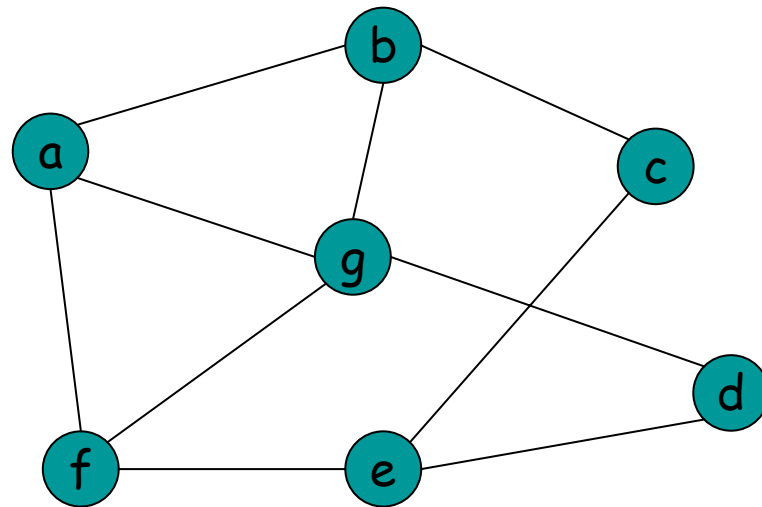
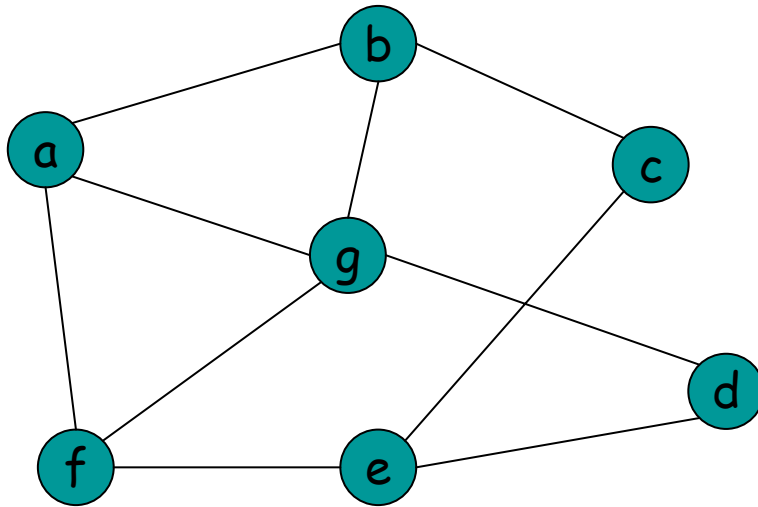
# Graphe partiel

- Soit  $G$  un graphe orienté ou pas
- Le **graphe partiel** de  $G$  engendré par  $E' \subseteq E$  est le graphe dont l'ensemble des arêtes (arcs) est  $E'$

Autrement dit:  
On supprime des  
arêtes



# Sous-graphe partiel (exemple)



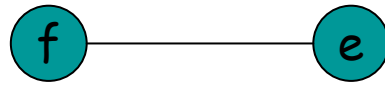
---

# Utilisation et applications

---

# Utilisation

- Les graphes capturent principalement la notion de relations binaires



- $R(u,v)$  est vraie
- Une relation peut dans la vie courante lier
- des objets divers:
  - ▶ Pierre connaît Jean
  - ▶ Paul est plus grand que Jacques
  - ▶  $E_1$  est client de  $E_2$
  - ▶ Il y a une route entre telle et telle ville....

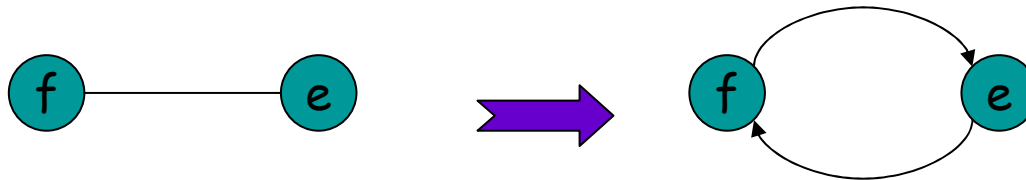


# Utilisation

- Un graphe de ces relations met à jour les contraintes structurelles de l'organisation des objets entre eux via une relation particulière.
- Lorsqu'un graphe est donné on veut généralement pouvoir dire des choses sur lui.
  - ▶ ces besoins s'expriment souvent en termes de distances entre les sommets

# Codage des graphes en machine

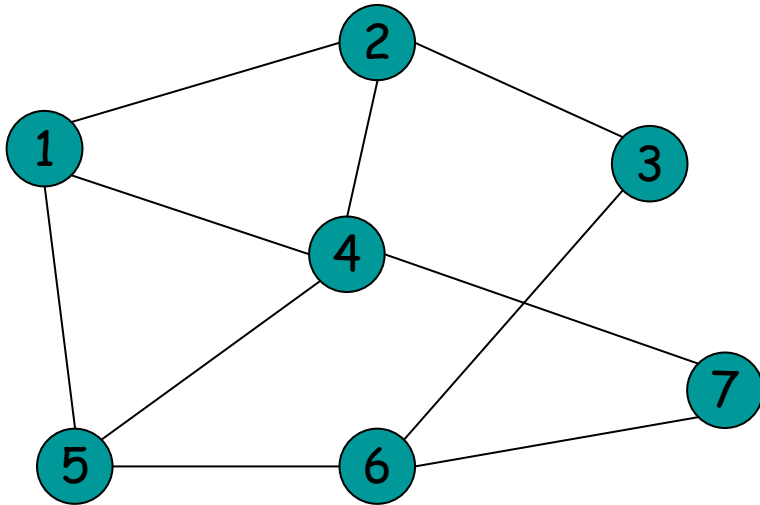
- Une des difficulté pour travailler sur les graphes est de les représenter correctement en mémoire.
  - ▶ sans utiliser trop de mémoire
  - ▶ en ayant un temps d'accès courts
- On codera souvent un graphe non orienté comme un graphe orienté symétrique



# La matrice d'adjacence

- Le plus simple des codages est d'avoir une matrice carrée  $n \times n$  (ou  $n = |V(G)|$ ) d'éléments binaires
- Les  $n$  sommets du graphes sont représentés par des entiers de 1 à  $n$
- $G[i][j] = 1$  si il y a un arc de  $i$  vers  $j$  dans  $G$
- $G[i][j] = 0$  sinon
- C'est la matrice d'adjacence du graphe

# La matrice d'adjacence



	1	2	3	4	5	6	7
1		1		1	1		
2	1		1	1			
3		1				1	
4	1	1			1		1
5	1			1		1	
6			1		1		1
7				1		1	

# La matrice d'adjacence

## ■ Avantages:

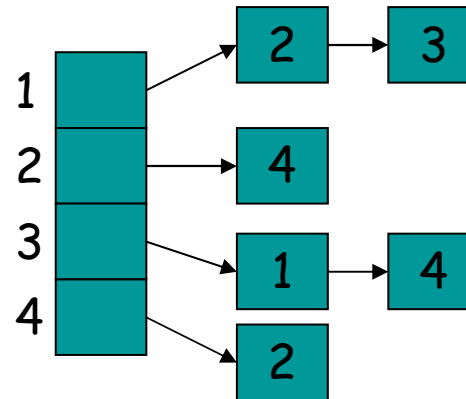
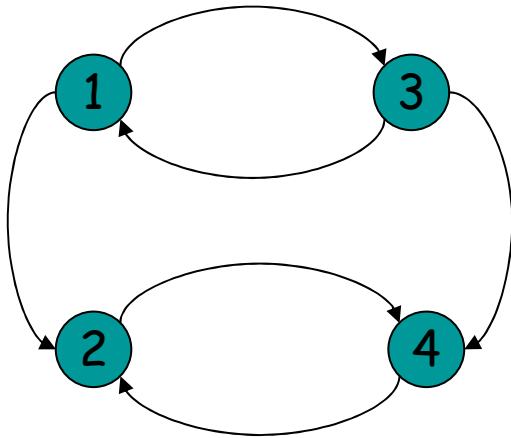
- ▶ Très facile à construire
- ▶ Accès très rapide à un arc particulier (constant)
- ▶ souple d'utilisation

## ■ Inconvénients:

- ▶ Occupation  $n^2$  cases alors que le nombre d'arcs peut être bien moindre (beaucoup de 0)
- ▶ Donc occupation mémoire importante

# Liste d'adjacence

- On peut utiliser un tableau à n cases de pointeurs, chaque case  $i$  pointant vers la liste chaînée des voisins sortants (ou entrants)



# Liste d'adjacence

- Avantages:

- ▶ On ne code que les arcs réellement présent dans le graphe

- Inconvénients:

- ▶ plus compliqué à mettre en œuvre
- ▶ temps de recherche pour savoir si un sommet est voisin d'un autre

# *Les arbres*

- Les arbres constituent une famille très importante des graphes
- Ils sont « minimaux » pour un certain nombre de propriétés.

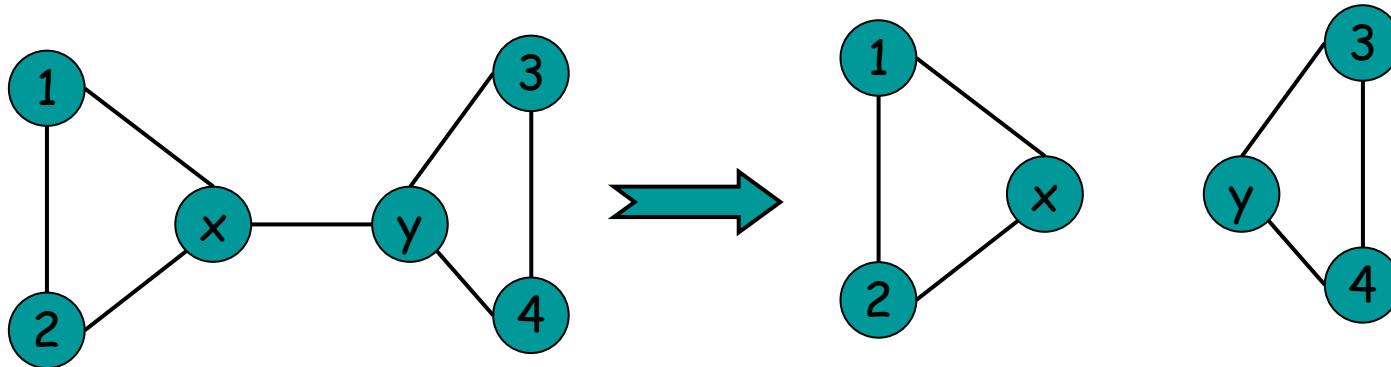


# *Caractérisation des arbres*

- Théorème: Soit  $T=(V,E)$  un graphe à  $n$  sommets
  - ▶  $T$  est un arbre
  - ▶  $T$  est connexe et sans cycle
  - ▶  $T$  est sans cycle et admet  $n-1$  arêtes
  - ▶  $T$  est connexe et admet  $n-1$  arêtes
  - ▶  $T$  est sans cycle et en ajoutant une arête on crée un cycle et 1 seul
  - ▶  $T$  est connexe et si on supprime une arête quelconque, il ne l'est plus

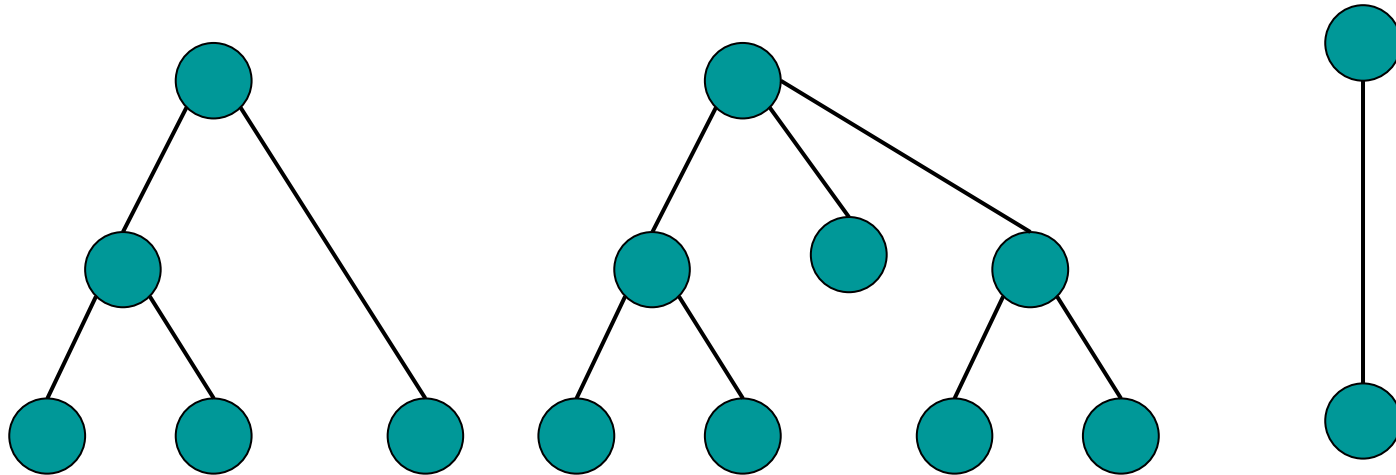
# *Isthme*

- Soit un graphe  $G=(V,E)$  connexe. Une arête  $[x,y]$  est appelée isthme si le graphe  $G'(V,E-[x,y])$  n'est pas connexe



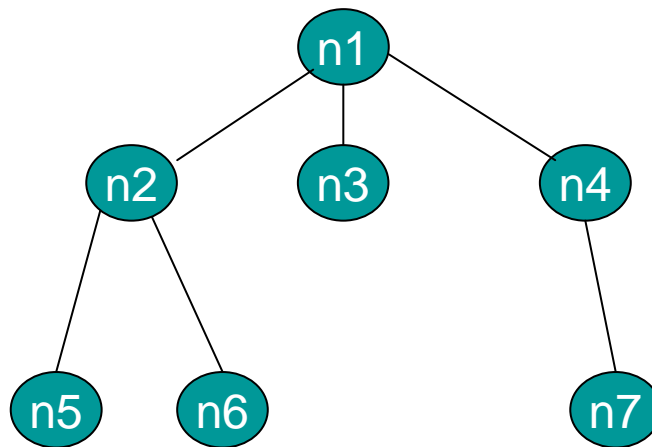
# *Forêt*

- Une *forêt* est un graphe dont les composantes connexes sont des arbres



# *Arborescence terminologie*

- Un nœud peut avoir 0 ou plusieurs fils
- Un nœud (sauf la racine) a exactement 1 père



# *Définition récursive*

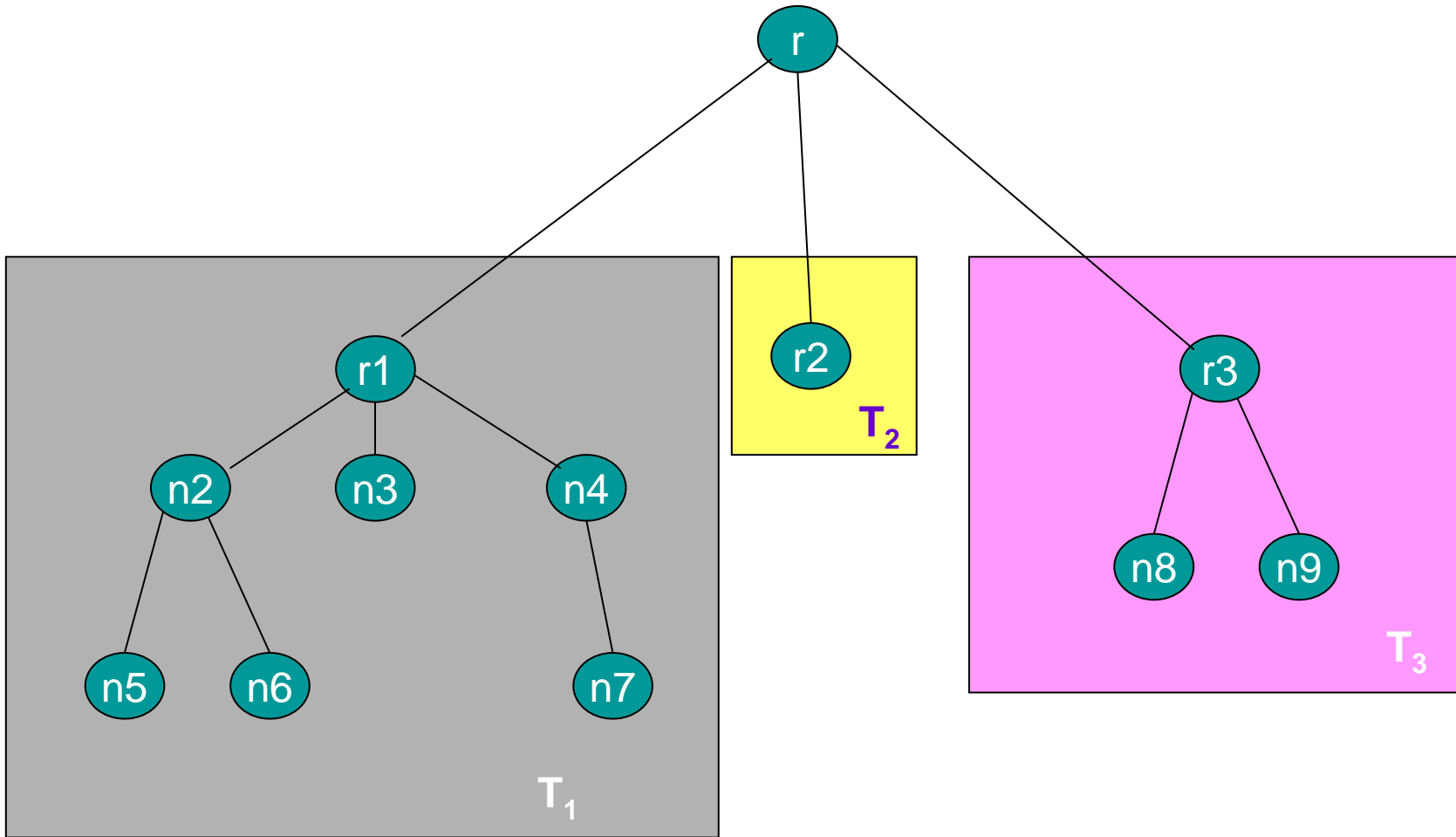
## ■ *Base :*

- ▶ un nœud unique  $n$  est un arbre
- ▶  $n$  est la racine de l'arbre

## ■ *Récurrance :*

- ▶ Soit  $r$  un nouveau nœud
- ▶  $T_1, T_2, \dots, T_k$  sont des arbres ayant pour racine  $r_1, r_2, \dots, r_k$ .
- ▶ Nouvel arbre a pour racine  $r$  et on ajoute un arc entre  $r$  et  $r_1, r$  et  $r_2, \dots, r$  et  $r_k$ .

# *Définition récursive : exemple*



# *Chemins, ancêtres, descendants ...*

- Les *ancêtres* d'un nœud :
  - ▶ Nœuds trouvés sur le *chemin unique* entre ce nœud et la racine
- Le nœud d est un *descendant* de a si et seulement si a est un ancêtre de d.
- Soit  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$  une séquence de nœuds :
  - ▶ *Longueur du chemin* = nombre d'arcs parcourus (k-1)

# *Généalogie*

- La racine est un ancêtre de tous les nœuds
- Chaque nœud est un descendant de la racine
- Les nœuds ayant le même père = *frères*
- Un nœud n et tous ses descendants = *sous-arbre*



---

# *Feuilles et nœuds intérieurs*

- Une *feuille* est nœud qui n'a pas de fils
  - Un *nœud intérieur* est un nœud qui a au moins 1 fils
  - Tout nœud de l'arbre est :
    - ▶ Soit une feuille
    - ▶ Soit un nœud intérieur
-

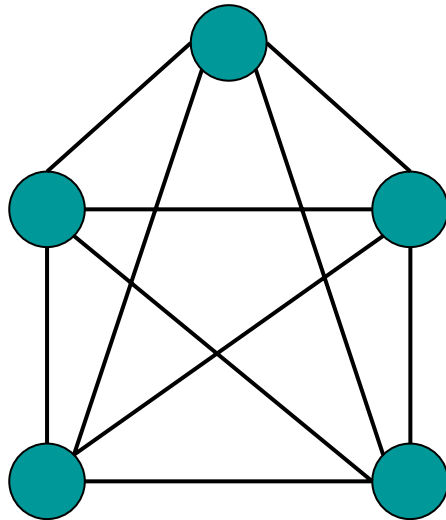
# *Hauteur et profondeur*

- La *hauteur d'un nœud*  $n$  est la longueur du plus long chemin depuis la racine jusqu'à  $n$ .
- La *hauteur d'un arbre* :  
$$\max \{h(x), x \text{ nœud de l'arbre}\}$$

# ***Familles particulières de graphes***

# *Graphe complet*

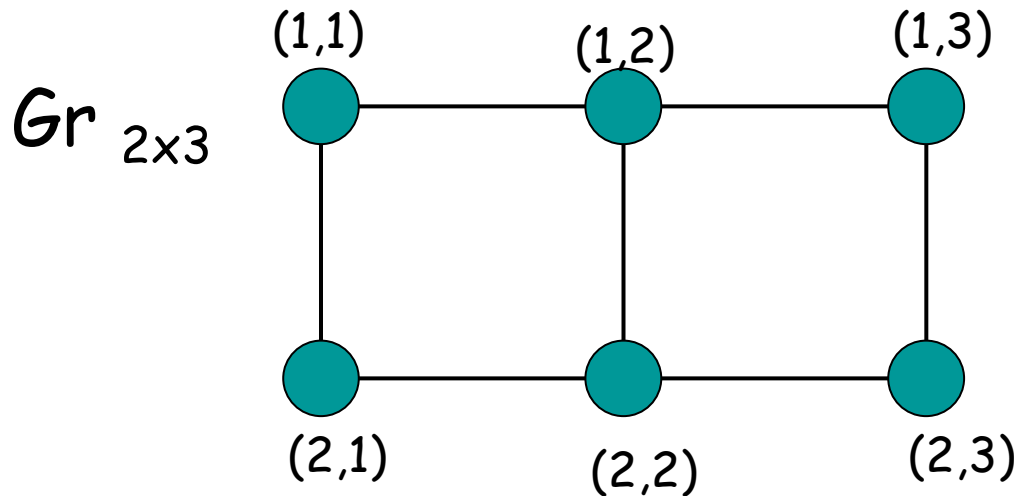
- $K_n$  à  $n$  sommets
  - ▶  $V = \{1, \dots, n\}$  et  $E = \{(i, j) : \forall i, j \in V, i \neq j\}$
  - ▶ entre chaque paire de sommets il y a une arête



$K_5$

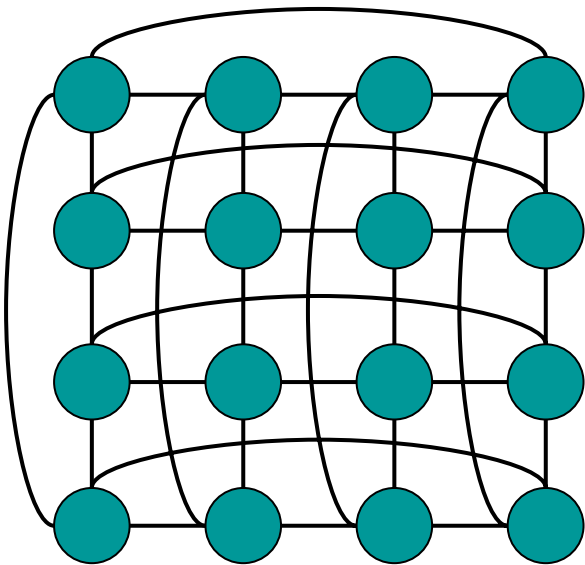
# Grille 2D

- $Gr_{p \times q}$  à  $n = p \cdot q$  sommets
  - ▶  $V = \{(i, j) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$
  - ▶  $E = \{(i, j)(i, j+1) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q-1\} \cup \{(i, j)(i+1, j) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q-1\}$



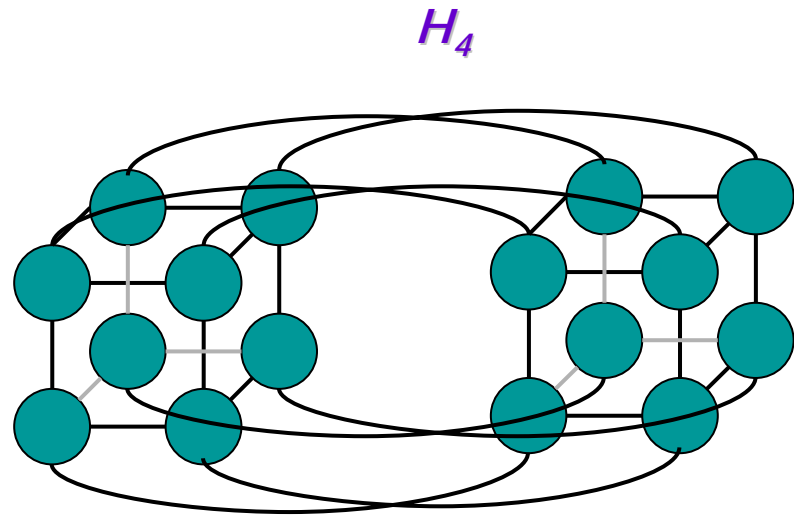
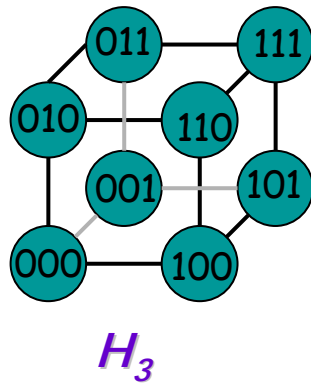
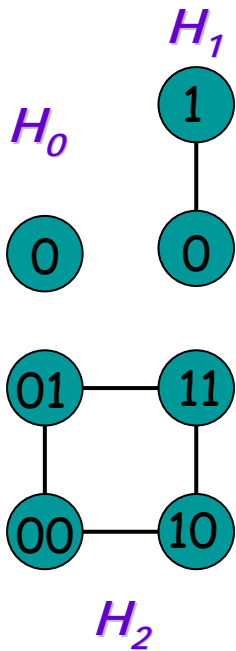
# *Tore 2D*

- $\text{Tr}_{p \times q}$  à  $n=p.q$  sommets
  - ▶  $V=\{(i,j): 0 \leq i \leq p-1, 0 \leq j \leq q-1\}$
  - ▶  $E=\{(i,j)(i,j+1 \bmod p): 0 \leq i \leq p-1, 0 \leq j \leq q-1\} \cup \{(i,j)(i+1 \bmod q,j): 0 \leq i \leq p-1, 0 \leq j \leq q-1\}$

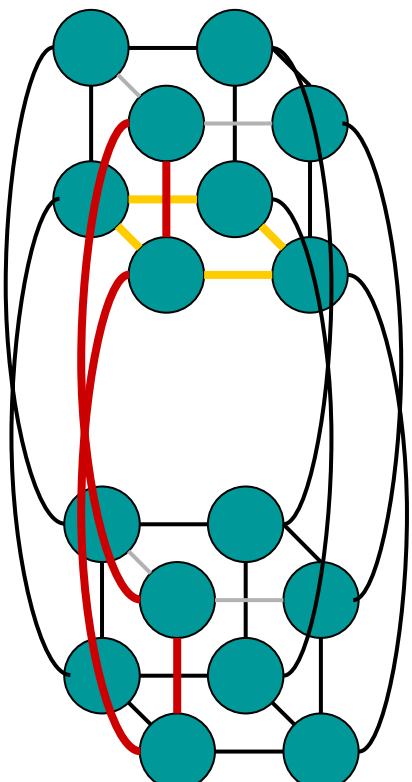
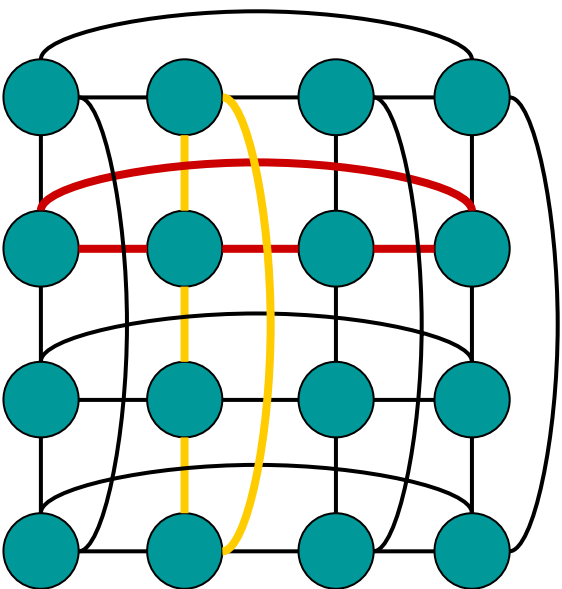


# *Hypercube*

- $H_d$  à  $n=2^d$  sommets
  - ▶ L'ensemble des sommets de  $H_d$  sont tous des  $d$ -uplets (ordonnés) de 0 et de 1/
  - ▶  $V=\{(x_1,\dots,x_d): \forall i\in\{1,\dots,d\} x_i\in\{0,1\}\}$
  - ▶ L'ensemble des arêtes: il y a une arête entre les sommets  $u$  et  $v$  ssi la représentation binaire de  $u$  et  $v$  diffère que d'un bit
  - ▶  $E=\{(x_1,\dots,x_d) (y_1,\dots,y_d) \exists !i x_i\neq y_i\}$



# Remarque





# Graphe biparti

- Un graphe  $G(V,E)$  est dit biparti si on peut diviser l'ensemble de ses sommets en 2 sous-ensemble  $X_1$  et  $X_2$  tel que  $X_1 \cup X_2 = V$  et  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  et toute arête  $a \in E$  a une extrémité dans  $X_1$  et l'autre dans  $X_2$ . On note  $G=(X_1,X_2,E)$

