

TD2 Graphe

Corrigé

February 9, 2008

1 Arbres à 6 sommets

Il y en a 6.

2 Connexité

1. Montrer que si un graphe, non supposé connexe, a exactement deux sommets de degrés impairs, alors ceux-ci sont reliés par une chaîne.

Preuve (écriture 1, par contradiction) Soit $G = (X, E)$ un graphe. Prenons un graphe sans sommets de degré 0, car de toute façon ils n'appartiennent à aucune chaîne. Soit a et b les 2 sommets de degrés impairs. Supposons que ces deux sommets ne sont pas reliés par une chaîne. Alors, ces 2 sommets ne sont pas dans la même composante connexe. Donc il existe une composante connexe C avec un seul sommet de degré impair. Soit G' le sous-graphe engendré correspondant à cette composante connexe. Le fait de considérer le sous-graphe G' ne change pas les degrés des sommets, car il n'existe pas d'arête qui n'ait pas une extrémité dans G' (car G' est une composante connexe). Donc ce sous-graphe possède un nombre impair de sommets de degré impair, ce qui est impossible.

Preuve (écriture 2, par implication directe)

- Si les deux sommets de degrés impairs sont dans la même composante connexe, alors il existe une chaîne qui relie les deux sommets.
 - La propriété *Le nombre de sommets de degré impair est pair* peut être généralisée et est également valable pour les composantes connexes. Nous avons donc la propriété: *Le nombre de sommets de degré impair dans une composante connexe est pair*. Comme G contient exactement deux sommets de degré impair, alors les deux sommets ne peuvent pas être dans deux composantes connexes différentes. Donc il existe une chaîne.
2. Montrer qu'un graphe est connexe si et seulement si il n'existe pas de bipartition de l'ensemble de ses sommets telle qu'aucune arête n'a une extrémité dans chaque classe de cette bipartition.

Preuve:

- \Rightarrow Montrez que si G est connexe, alors il n'existe pas de bipartition. Supposons une telle bipartition existe. Supposons de plus que x_i est dans une partition et que x_j est dans l'autre. Comme il n'existe pas d'arête entre les deux partitions, x_i et x_j ne sont pas reliés par une chaîne. G n'est donc pas connexe.

- \Leftarrow Montrez que si il n'existe pas une telle bipartition, alors G est connexe. Nous montrons la contraposée, si G n'est pas connexe, il existe une bipartition. Comme G n'est pas connexe, il existe une paire de sommets x_i et x_j qui n'est pas relié par une chaîne. Soit la proposition de bipartition suivante:
 - Partition A: tout les sommets dont il existe une chaîne avec x_i (*i.e.* composante connexe $C_i = (X_i, E_i)$ contenant x_i)
 - Partition B: tout les autres sommets (*i.e.* $X_A = X \setminus X_i$). (cette partition peut inclure plusieurs composantes connexes, le graphe n'en ayant pas forcément deux).

Nous sommes sûrs qu'il y a pas d'arête entre les deux partitions car il n'existe pas de chaîne entre x_i et x_j . Donc la bipartition proposée est correcte du point de vue de l'hypothèse de l'énoncé.

3 Isthmes

Preuve

- \Rightarrow Si une arete est un isthme, alors elle n'appartient pas à un cycle.
 Soit $G = (X, E)$ un graphe. Soit $p = (x_1, e_1, x_2, \dots, x_k, e_k, x_1)$ un cycle un G . Donc $\forall (i, j) \in [1, k]^2$ avec $i < j$ il existe deux chaines entre x_i et x_j :

1. La chaîne $(x_i, e_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, e_{j-1}, x_j)$
2. La chaîne $(x_j, e_j, \dots, x_k, e_k, x_1, \dots, e_{i-1}, x_i)$

Supposons qu'il existe $h \in [1, k]$ tel que l'arete e_h du cycle p soit un ishtme. Alors retirer cet arete separe le graphe en deux composante connexe. Donc les sommets x_h et x_{h+1} ne sont plus relié par une chaîne. Ors la chaîne $(x_{h+1}, e_{h+1}, \dots, x_k, e_k, x_1, \dots, e_{h-1}, x_h)$ relie x_h et x_{h+1} . Donc x_h et x_{h+1} appartiennent à la meme composante connexe. Contradiction.

- \Leftarrow Montrez que si l'arête e n'appartient pas à un cycle dans G (G étant un graphe connexe) alors e est un isthme.

Dans G il existe un couple de sommets x_i et x_j qui est relié par e . Comme e n'appartient pas à un cycle, il n'existe pas une autre chaîne reliant x_i et x_j . La suppression de e deconnecte x_i et x_j et le graphe G n'est plus connexe. e est donc un isthme.

4 Arbres couvrant

1. Un graphe partiel d'un graphe connexe G est un arbre couvrant de G si et seulement si il est connexe et minimal avec cette propriété relativement à la suppression d'arêtes.

Preuve:

- \Rightarrow Montrez que si un graphe partiel est un arbre couvrant de G alors il est connexe et minimal avec la propriété relativement à la suppression. Un arbre couvrant est connexe car c'est un arbre. Comme c'est un arbre, chaque arete est un isthme. Donc chaque suppression d'une arete separe le graphe en 2 composantes connexe. Donc le graphe est minimal.
- \Leftarrow Montrez qu'un graphe partiel qui est connexe et minimam avec la propriété relativement à la suppression est un arbre couvrant. Si le graphe est minimal sur la suppression d'arete, alors chaque suppression d'arete separe le graphe en au moins 2 composante connexe. Donc chaque arete du graphe est un isthme. Un graphe G connexe tel que chaque arete est un isthme est un arbre. G' est un graphe partiel qui est un arbre, donc G' est un arbre couvrant de G .

2. Un graphe partiel d'un graphe connexe G est un arbre couvrant de G si et seulement si il est acyclique et maximal avec cette propriété relativement à l'ajout d'arêtes.

Preuve:

- \Rightarrow Montrez que si un graphe partiel connexe est un arbre couvrant alors il est acyclique et maximal avec propriété relativement à l'ajout d'arêtes.

Par définition, un arbre est acyclique. Comme c'est un arbre, il existe une chaîne élémentaire entre chaque sommets. Ajouter un arête crée donc un cycle, car une deuxième chaîne. Donc le graphe est maximal sur cette propriété.

- \Leftarrow Montrez qu'un graphe partiel G' (engendré par un graphe connexe G) acyclique et maximal est un arbre.

Soit $G = (X, E)$. Soit $G' = (X, F)$ et $F \subset E$ un graphe partiel acyclique et maximal sur cette propriété relativement à l'ajout d'arête.

- Comme le graphe G' est maximal sur l'ajout d'arête et engendré par un graphe connexe G , montrons que G' est connexe:

Soit x et y deux sommets reliés dans G par un arête e , mais non reliés dans G' (*i.e.* $F \not\subset e$). L'ajout de e dans G' crée un cycle dans G' (hypothèse de "maximalité"), donc il existe dans G' une chaîne entre x et y . Maintenant, soient x et y deux sommets quelconques (pas forcément relié directement dans G). G est connexe donc il existe dans G une chaîne c reliant x et y . Si dans cette chaîne on ne touche pas aux arêtes qui appartiennent à G' , et qu'on remplace les morceaux $\{x_i, e_{i+1}, x_{i+1}\}$ où e_{i+1} appartient à $G - G'$, par une chaîne de G' reliant x_i et x_{i+1} (cette chaîne existe d'après le raisonnement précédent), alors on obtient bien une chaîne c' de G' reliant x et y . Donc G' est connexe. Donc $m \geq n - 1$.

- Comme le graphe est acyclique: c'est une forêt. Donc, $m \leq n - 1$.

Finalement, comme $m \geq n - 1$ et $m \leq n - 1$, on a donc $m = n - 1$. Un graphe acyclique tel que $m = n - 1$ est un arbre. G' est un graphe partiel qui est un arbre, donc G' est un arbre couvrant de G .

Exercice 5 : Graphe cyclique

Soit C_k un graphe (non orienté) à k sommets constitué d'un seul cycle, c'est à dire:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

$$E = \{x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k, x_kx_1\}$$

1. Montrer que chaque sommet de C_n est de degré 2.

Preuve (version 1 courte): Chaque sommet x_i est bien l'extrémité de deux arêtes, à savoir

$$\begin{aligned} &\{x_i, x_{i+1}\} \text{ si } i < n \\ &\{x_1, x_n\} \text{ si } i = n \end{aligned}$$

Preuve (version 2 plus formelle): Un sommet de degré 0 ou 1 ne fait pas parti d'un cycle. Donc C_k ne contient aucun sommet de degré 0 ou 1. Supposons que C_k possède des sommets de degré supérieur à 2. Comme tous les sommets sont relié par un cycle, le graphe est connexe. Soit x_i un sommet tel que $d(x_i) = l > 2$. Alors x_i est relié à l sommets différents. Soit x_j , $i < j$, un sommet adjacent à x_i autrement qu'avec la condition $j = i + 1$ (*i.e.* on utilise pas l'arête qu'on avait déjà dans le premier cycle. Alors $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, x_i\}$ est un cycle différent du cycle initial car ne contenant pas les sommets $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{j+1}, \dots, x_k\}$. Donc le graphe possède plusieurs cycles. Contradiction.

2. Montrer que si G est un graphe (non orienté) connexe à k sommets dont tous les sommets sont de degré 2, alors G est isomorphe à C_k .

Preuve: Par induction sur n . Rappelons que la somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois son nombre d'arêtes. Si chacun des n sommets d'un graphe est de degré 2, ce graphe a donc n arêtes.

- si $n = 1$, G n'a qu'une seule arête a et un seul sommet s . E contient ss et le graphe est donc isomorphe à C_1 .
 - si $n = 2$, G a deux sommets s et s' et deux arêtes a et a' . Puisque G est connexe, s est relié à s' par une des deux arêtes. Supposons que ce soit l'arête a . On a alors $a = ss'$. Si l'autre arête a' est égale à $a' = ss$ ou $a' = s's'$ alors s ou s' aurait degré 3. On a donc $a' = ss'$ et G est isomorphe à C_2 .
 - Supposons que G ait $n + 1$ sommets avec $n \geq 2$. Soit s un sommet et a' une arête d'extrémité s .
 - Si $a' = ss$, comme s est de degré 2, s n'est pas l'extrémité d'aucune autre arête, et s est une composante connexe de G , ce qui est exclus.
 - Si $a' = ss'$ avec $s \neq s'$, il existe donc une autre arête a'' d'extrémité s' . On ne peut pas avoir $a'' = s''s''$ pour les mêmes raisons que précédemment, d'où $a'' = ss''$ avec $s \neq s''$.
 - On sait donc que $a' = ss'$ avec $s \neq s'$ et $a'' = ss''$ avec $s \neq s''$. Si $s' = s''$, s' n'est pas extrémité d'aucune autre arête que a' et a'' . L'ensemble $\{s, s'\}$ est une composante connexe de G qui n'est pas égale à G tout entier, puisque G a strictement plus de deux sommets, ce qui est exclus.
 - On a donc finalement $a' = ss'$ et $a'' = ss''$ avec $s \neq s'$, $s \neq s''$ et $s' \neq s''$. Considérons le graphe G' obtenu en retirant de G le sommet s et les arêtes a' et a'' , et en ajoutant une arête a avec $a = s's''$. C'est un graphe à n sommets et tous ces sommets sont de degré 2. Par hypothèse d'induction, il est isomorphe à C_n . On voit alors facilement que G est obtenu à partir de G' en intercalant s entre s' et s'' , et donc que G est isomorphe à C_{n+1} .
3. Montrer que si G est un graphe (non orienté) à k sommets dont tous les sommets sont de degré 2, alors G est une union disjointe de graphes G_{k_1}, \dots, G_{k_l} où G_{k_i} est isomorphe à C_{k_i} avec $k_1 + \dots + k_l = k$.

Preuve (version 1): Soit G un graphe est soit S_1, S_2, \dots, S_k ses composantes connexes. Soit G_i le sous-graphe de G dont l'ensemble des sommets est S_i . Alors G est la réunion disjointe des G_i . De plus chaque G_i est un grpahe connexe dont tous les sommets sont de degrés 2; il est donc isomorphe à un C_{n_i} .

Preuve (version 2): Soit G un graphe non connexe ayant tous ses sommets avec un degré 2. Chaque composante connexe du graphe est un sous-graphe connexe dont tous les sommets sont de degré 2. Par la question 2, chaque sous-graphe $G' = (X', E')$ connexe de G est isomorphe à $C_{|X'|}$. Dans un graphe, la somme des sommets de chaque composante correspond aux nombre de sommet du graphe. Donc G est une union disjointe de cycle.

5 Caractérisation des arbres

1. Condition 1 et 2: C'est la définition d'un arbre!

2. Condition 2 et 3: Comme G est acyclique, G est une forêt. Comme $m = n - 1$, G est une forêt connexe, donc G est un arbre.
3. Condition 1 et 3: Soit G connexe et $m = n - 1$. On retire tant que possible une arête non isthme. Le graphe partiel G' engendré est donc connexe, et minimal sur la suppression d'arête. C'est donc un arbre. Comme G' est un arbre, $m = n - 1$. Donc $G = G'$.