

# Mathématiques discrètes. C7 - Théorie des nombres.

## Suite et fonction génératrice.

10 avril 2013

### 1 Suites.

**Définition.** Une suite est une séquence infinie de nombres  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  et on la note  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Définition.** On dit que deux suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  sont égales ssi  $a_k = b_k \forall k \geq 0$ .

**Problème.** On se donne une suite  $(a_k)$  qui est déterminée par une relation récurrente. Le but est de trouver le terme général  $a_k$ .

**Exemples.**

**Suite arithmétique.** Définie par la relation :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{k+1} = a_k + r \end{cases}$$

où  $r$  est une constante. Alors le terme général est donné par

$$a_k = a + kr.$$

**Suite géométrique.** Définie par la relation :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{k+1} = qa_k \end{cases}$$

où  $q$  est une constante. Alors le terme général est donné par

$$a_k = aq^k.$$

**Suite arithmético-géométrique.** Définie par la relation :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{k+1} = qa_k + r \end{cases}$$

où  $q$  et  $r$  sont deux constantes.

**Suite récurrente linéaire** Définie par la relation :

$$a_{k+n} = q_0a_k + q_1a_{k+1} + \dots + q_{n-1}a_{k+n-1}$$

où  $q_0, \dots, q_{p-1}$  sont  $n$  constantes.

*Cas particulier.* La suite de Fibonacci  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots)$  est définie par

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \end{cases}$$

## 2 Série génératrice.

Il est commode de représenter une suite  $(a_k)$  par une série génératrice :

$$G_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} a_k x^k.$$

Cette série génératrice est aussi appelée une série entière dont le coefficient associé à  $x^k$  est  $a_k$ .

**Propriété.** Une suite est complètement caractérisée par sa série génératrice, c.à.d.,

$$(a_k) = (b_k) \Leftrightarrow A(x) = B(x).$$

**Exemples.**  $x$  est la série génératrice de la suite  $(0, 1, 0, 0, \dots)$ .

$1 + x$  est la série génératrice de la suite  $(1, 1, 0, 0, \dots)$ .

La suite constante  $(a_k = 1)$  est représentée par la série génératrice :

$$\sum_{k \geq 0} a_k x^k = \sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$$

sous la condition de convergence  $|x| < 1$ .

Réciproquement, la série génératrice  $G_a(x) = \frac{1}{1-x}$  représente une unique suite et c'est la suite constante ( $a_k = 1$ ).

Le binôme de Newton

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

représente la suite  $(C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n, 0, 0, \dots)$ .

De même,

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$$

représente la suite  $(C_n^0, -C_n^1, C_n^2, -C_n^3, \dots, (-1)^n C_n^n, 0, 0, \dots)$ .

Dans la suite, on étudiera deux questions : déterminer la série génératrice et le terme général d'une suite.

### 3 Suite arithmétique simple.

$(a_k)$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{k+1} = a_k + 1, \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

Le terme général est connu :  $a_k = k$ .

Quelle est la série génératrice ?

**Première méthode.** On se base sur le terme général déjà connu  $a_k = k$  :

$$G_a(x) = \sum_k a_k x^k = \sum_k k x^k = ?$$

On a :

$$\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

En dérivant les deux côtés de cette égalité par rapport à  $x$ , on obtient

$$\sum_{k \geq 1} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Alors

$$\sum_k kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

En conclusion, la forme close de la série génératrice est donnée par

$$G_a(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

**Deuxième méthode.** On réécrit la série génératrice sous la forme d'une somme de deux parties dont la première contient tous les premiers termes déjà donnés et la deuxième les termes restant où on peut appliquer la relation récurrente. En remplaçant  $a_k$  par  $a_{k-1} + 1$  pour tout  $k \geq 1$  on obtient :

$$\begin{aligned} G_a(x) &:= \sum_{k \geq 0} a_k x^k = a_0 x^0 + \sum_{k \geq 1} a_k x^k \\ &= 0 + \sum_{k \geq 1} (a_{k-1} + 1) x^k \\ &= \sum_{k \geq 1} a_{k-1} x^k + \sum_{k \geq 1} x^k \\ &= \sum_{k \geq 1} a_{k-1} x^{k-1} x + \frac{x}{1-x} \\ &= x G_a(x) + \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

La forme close de  $G_a(x)$  est donnée par

$$G_A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On a vu les deux égalités suivantes :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$$

et

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k \geq 0} (k+1) x^k.$$

Une extension de ces égalités (à noter) est

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} C_{n+k}^n x^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## 4 Suite géométrique

$(a_k)$

$$\begin{aligned}a_0 &= a \\ a_k &= qa_{k-1}, \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

Le terme général est  $a_k = aq^k, k \geq 0$ .

**Première méthode.** En remplaçant  $a_k$  par  $aq^k$ , on obtient

$$\begin{aligned}G_a(x) &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k \\ &= \sum_{k \geq 0} aq^k x^k \\ &= \frac{a}{1 - qx}.\end{aligned}$$

**Deuxième méthode.** En utilisant la relation récurrente, on a

$$G_a(x) = a_0 x^0 + \sum_{k \geq 1} a_k x^k = a + \sum_{k \geq 1} qa_{k-1} x^k = a + qxG_a(x).$$

Alors

$$G_a(x) = \frac{a}{1 - qx}.$$

## 5 Suite récurrente linéaire d'ordre $n$

$(a_k)$  définie par les  $n$  premiers termes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  et par la relation de récurrence

$$a_{k+n} = q_0 a_k + q_1 a_{k+1} + \dots + q_{n-1} a_{k+n-1} \quad \forall k \geq 0$$

où  $q_0, \dots, q_{n-1}$  sont  $n$  constantes t.q.  $q_0 \neq 0$ .

**Remarque.** Une suite géométrique est une suite récurrente linéaire d'ordre  $n = 1$ . La suite de Fibonacci est aussi une suite récurrente linéaire mais d'ordre  $n = 2$ .

Il n'est pas facile de trouver le terme général de ces suites alors pour déterminer la série génératrice et le terme gééral, on utilisera tout d'abord la deuxième méthode pour la série génératrice.

## 5.1 Forme close de la série génératrice

La série génératrice de  $(a_k)$  est donnée par

$$\begin{aligned}
G_a(x) &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \sum_{k \geq 0} a_{k+n} x^{k+n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \sum_{k \geq 0} \left( q_0 a_k + q_1 a_{k+1} + \dots + q_{n-1} a_{k+n-1} \right) x^{k+n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + q_0 x^n A(x) + q_1 x^{n-1} \left( A(x) - a_0 \right) + \dots \\
&\quad + q_{n-1} x \left( A(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{n-2} x^{n-2} \right) \\
&= G_a(x) \left( q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_{n-1} x \right) + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k - \left( a_0 q_1 x^{n-1} + (a_0 + a_1 x) q_2 x^{n-2} + \dots + (a_0 + a_1 x - \dots - a_{n-2} x^{n-2}) q_{n-1} x \right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&G_a(x) \left( q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_{n-1} x - 1 \right) \\
&= a_0 q_1 x^{n-1} + (a_0 + a_1 x) q_2 x^{n-2} + \dots + (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-2} x^{n-2}) q_{n-1} x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$G_a(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où  $P(x)$  est un polynôme de degré  $n-1$  au plus

$$P(x) = a_0 q_1 x^{n-1} + (a_0 + a_1 x) q_2 x^{n-2} + \dots + (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-2} x^{n-2}) q_{n-1} x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

et  $Q(x)$  est un polynôme de degré  $n$ , ( $q_0 \neq 0$ ) :

$$Q(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_{n-1} x - 1.$$

À partir de la série génératrice, on essaie de trouver le terme général de la suite. Pour cela, on décompose la série génératrice en éléments simples.

**Exemple de la suite de Fibonacci.** La suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_k = f_{k-1} + f_{k-2}, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

La série génératrice est définie par

$$\begin{aligned} G_f(x) &= \sum_{k \geq 0} f_k x^k = f_0 x^0 + f_1 x^1 + \sum_{k \geq 2} f_k x^k \\ &= 1 + x + \sum_{k \geq 2} (f_{k-1} + f_{k-2}) x^k = 1 + x + x(G_f(x) - 1) + x^2 G_f(x) \\ &= 1 + G_f(x)(x^2 - x). \end{aligned}$$

Alors la forme close de la série génératrice est donnée par

$$G_f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec  $P(x) = -1$  et  $Q(x) = x^2 - x - 1$ .

## 5.2 Décomposition en éléments simples

**Exemple de la suite Fibonacci.** Pour la suite de Fibonacci,  $Q(x) = x^2 - x - 1$  est un polynôme du second degré admettant deux racines simples distinctes

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

**Théorème.** Alors

$$Q(x) = (x - r_1)(x - r_2)$$

et  $G_f(x)$  est décomposée en éléments simples :

$$G_f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{(x - r_1)} + \frac{c_2}{(x - r_2)}$$

Les constances  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminées par la méthode des pôles.

Pôle  $r_1$  : On multiplie les deux côtés de l'égalité précédente par  $(x - r_1)$  :

$$\frac{P(x)}{x - r_2} = c_1 + \frac{c_2(x - r_1)}{x - r_2}$$

En remplaçant  $x$  par  $r_1$ , on obtient

$$c_1 = \frac{P(r_1)}{r_1 - r_2} = \frac{-1}{r_1 - r_2}.$$

Pôle  $r_2$  : De même, on a

$$c_2 = \frac{P(r_2)}{r_2 - r_1} = \frac{-1}{r_2 - r_1}.$$

Alors

$$G_f(x) = \frac{c_1}{(x - r_1)} + \frac{c_2}{(x - r_2)},$$

avec  $r_1 = -(1 + \sqrt{5})/2$ ,  $r_2 = -(1 - \sqrt{5})/2$  et  $c_1 = -1/(r_1 - r_2)$ ,  $c_2 = -1/(r_2 - r_1)$ .

**Le terme général de la suite de Fibonacci.** On a vu que

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k \geq 0} x^k$$

alors en faisant un changement de variable, on a

$$\frac{1}{x - r} = \sum_{k \geq 0} -\frac{1}{r^{k+1}} x^k, \quad \forall r.$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \frac{c_1}{x - r_1} = \sum_{k \geq 0} -\frac{c_1}{r_1^{k+1}} x^k \\ \frac{c_2}{x - r_2} = \sum_{k \geq 0} -\frac{c_2}{r_2^{k+1}} x^k \end{cases}$$

D'où,

$$G_f(x) = \sum_{k \geq 0} \left( -\frac{c_1}{r_1^{k+1}} - \frac{c_2}{r_2^{k+1}} \right) x^k.$$

Le terme général de la suite de Fibonacci est donc donné par

$$f_k = -\frac{c_1}{r_1^{k+1}} - \frac{c_2}{r_2^{k+1}}$$

où

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} \quad c_1 = \frac{-1}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$



**Cas général.** Revenons dans le cas plus général où

$$G_a(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec  $P(x)$  un polynôme de degré  $n - 1$  au plus et  $Q(x)$  un polynôme de degré  $n$ .

**Théorème.** Si  $Q(x)$  admet  $n$  racines simples  $r_1, r_2, \dots, r_n$  deux à deux distinctes alors

$$Q(x) = q_0(x - r_1) \times (x - r_2) \times \dots \times (x - r_n) \quad (1)$$

et

$$G_f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - r_1} + \frac{c_2}{x - r_2} + \dots + \frac{c_n}{x - r_n} \quad (2)$$

où les constances  $(c_1, \dots, c_n)$  sont déterminées par la méthode des pôles. Pour chaque pôle  $r_i$ , posons

$$Q_i(x) = \frac{Q(x)}{x - r_i}$$

En multipliant les deux côtés de (2) par  $Q(x)$ , on obtient

$$P(x) = c_1 Q_1(x) + c_2 Q_2(x) + \dots + c_n Q_n(x)$$

En prenant  $x = r_i$ , on a

$$P(r_i) = c_1 Q_1(r_i) + c_2 Q_2(r_i) + \dots + c_n Q_n(r_i)$$

Remarquons que  $Q_j(r_i) = 0$  pour tous  $j \neq i$ . Alors

$$P(r_i) = c_i Q_i(r_i).$$

D'où,

$$c_i = \frac{P(r_i)}{Q(r_i)}. \quad (3)$$

En conclusion, on peut écrire la série génératrice  $G_a(x)$  sous la forme des éléments simples suivants :

$$G_f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - r_1} + \frac{c_2}{x - r_2} + \dots + \frac{c_n}{x - r_n}$$

où  $r_1, \dots, r_n$  sont les racines de  $Q(x)$  et les constantes  $c_i$  sont déterminées par (3).

### 5.3 Terme général.

Afin de déterminer le terme général, on applique la formule

$$\frac{1}{x-r} = \sum_{k \geq 0} -\frac{1}{r^{k+1}} x^k.$$

Alors

$$\begin{aligned} G_a(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} -\frac{1}{r_i^{k+1}} x^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( -\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^{k+1}} \right) x^k. \end{aligned}$$

Donc, le terme général de la suite est donné par

$$a_k = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^{k+1}}, \quad k \geq 0.$$

**Remarque.** On a traité le cas où le polynôme  $Q$  n'admet que des racines simples. Pour le cas des racines multiples, il faut utiliser le résultat suivant :

**Théorème.** Si  $Q(x)$  admet  $m$  racines  $r_1, r_2, \dots, r_m$  deux à deux distinctes, de degré  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  respectivement t.q.  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$  alors

$$Q(x) = q_0(x-r_1)^{\alpha_1} \times (x-r_2)^{\alpha_2} \times \dots \times (x-r_m)^{\alpha_m} \quad (4)$$

et

$$\begin{aligned} G_a(x) &= \frac{c_{1,1}}{(x-r_1)} + \frac{c_{1,2}}{(x-r_1)^2} + \dots + \frac{c_{1,\alpha_1}}{(x-r_1)^{\alpha_1}} \\ &+ \frac{c_{2,1}}{(x-r_2)} + \frac{c_{2,2}}{(x-r_2)^2} + \dots + \frac{c_{2,\alpha_2}}{(x-r_2)^{\alpha_2}} \\ &\vdots \\ &+ \frac{c_{l,1}}{(x-r_m)} + \frac{c_{l,2}}{(x-r_m)^2} + \dots + \frac{c_{l,\alpha_m}}{(x-r_m)^{\alpha_m}} \end{aligned} \quad (5)$$

Dans ce cas, il faut adapter la méthode des pôles afin de trouver les constantes  $(c_{i,j})$ .

Pour chaque pôle  $r_i, i = 1, 2, \dots, m$ , posons

$$Q_i(x) = \frac{Q(x)}{(x-r_i)^{\alpha_i}}$$

alors  $Q_i$  est un polynôme, de plus, il est divisible par  $(x - r_j)^{\alpha_j}$  pour tout  $j \neq i$ . En multipliant les deux côtés de (5) par  $Q(x)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
P(x) &= Q_1(x) \left( c_{1,1}(x - r_1)^{\alpha_1-1} + c_{1,2}(x - r_1)^{\alpha_1-2} + \dots + c_{1,\alpha_1} \right) \\
&+ Q_2(x) \left( c_{2,1}(x - r_2)^{\alpha_2-1} + c_{2,2}(x - r_2)^{\alpha_2-2} + \dots + c_{2,\alpha_2} \right) \\
&\vdots \\
&+ Q_m(x) \left( c_{m,1}(x - r_m)^{\alpha_m-1} + c_{m,2}(x - r_m)^{\alpha_m-2} + \dots + c_{m,\alpha_m} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m Q_i(x) \left( c_{i,1}(x - r_i)^{\alpha_i-1} + c_{i,2}(x - r_i)^{\alpha_i-2} + \dots + c_{i,\alpha_i} \right)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} c_{i,\alpha_i} &= \frac{P}{Q_i}(r_i) \\ c_{i,\alpha_i-1} &= \frac{\dot{P}/Q_i - c_{i,\alpha_i}}{x - r_i}(r_i) \\ &\vdots \\ c_{i,1} &= \frac{P/Q_i - c_{i,\alpha_i} - c_{i,\alpha_i-1}(x - r_i) - \dots - c_{i,2}(x - r_i)^{\alpha_i-2}}{(x - r_i)^{\alpha_i-1}}(r_i) \end{cases} \quad (6)$$

On décompose ainsi la série génératrice  $G_a(x)$  en somme des éléments simples :

$$G_a(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{c_{i,j}}{(x - r_i)^j}.$$

**Question.** Afin d'identifier les termes généraux, comment réécrire  $G_a(x)$  sous la forme d'une série entière ?

On a vu que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x-r} = \sum_{k \geq 0} -\frac{1}{r^{k+1}} x^k.$$

De même,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k \geq 0} (k+1)x^k \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(x-r)^2} = \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{r^{k+2}} x^k,$$

et un exposant  $n+1$  quelconque,

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} C_{n+k}^n x^k, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(x-r)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{C_{n+k}^n}{r^{k+n+1}} x^k.$$

Alors pour l'exposant  $j$ , on a

$$\frac{c_{i,j}}{(x - r_i)^j} = \sum_{k \geq 0} (-1)^j c_{i,j} \frac{C_{j-1+k}^{j-1}}{r_i^{k+j}} x^k$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} G_a(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\alpha_i} \sum_{k \geq 0} (-1)^j c_{i,j} \frac{C_{j-1+k}^{j-1}}{r_i^{k+j}} x^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\alpha_i} (-1)^j c_{i,j} \frac{C_{j-1+k}^{j-1}}{r_i^{k+j}} \right) x^k. \end{aligned}$$

En identifiant le coefficient associé à  $x^k$  dans la série génératrice  $G_a(x)$ , on obtient

$$a_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\alpha_i} (-1)^j c_{i,j} \frac{C_{j-1+k}^{j-1}}{r_i^{k+j}}, \quad (7)$$

où  $r_i$  sont les racines de degré  $\alpha_i$  du polynôme  $Q(x)$  et les constantes  $c_{i,j}$  sont déterminées par la méthode des pôles (6).