

TD1 Graphe

Corrigé

1^{er} février 2008

Exercice 1

1. Isomorphe :
 - (a) non, présence d'un sommet degré 4 dans un et pas dans l'autre,
 - (b) oui, 8=4, ensuite 2 affectation possibles. Une des deux : 2=7, 1=9, 3=6 et 5=10
2. Dessin facile à trouver. Avec même nombre d'arete *et de sommet* plus dur mais aussi faisable (jouer sur le nombre de cycle)
3. Il y a en 11 : 1+1+2+3+2+1+1 (en enumerant par nombre d'aretes)

Exercice 2

Pour tout graphe $G(X, E)$,

$$\sum_{n \in X} d(n) = \sum_{a \in E} 2 = 2 |E|$$

car une arete est relié à 2 noeuds. Donc la somme des degrés d'un graphe est pair (propriete (1)) (car de la forme $2n$, $n \in \mathbb{N}$).

On peut decomposer cette somme en sous-somme : celle des degrés pairs et celle des degrés impair :

$$X_p : \{n \in X, d(n) = 2k, k \in \mathbb{N}\} \text{ (les sommets de degré pair)}$$

$$X_i : \{n \in X, d(n) = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\} \text{ (les sommets de degré impair)}$$

Ainsi on a :

$$\sum_{n \in X} d(n) = \underbrace{\sum_{n \in X_i} d(n)}_{(a)} + \underbrace{\sum_{n \in X_p} d(n)}_{(b)}$$

Une somme de nombres pairs est paire, donc (a) est paire. En utilisant la prorieta (1), on en deduit donc que (b) est paire, autrement dit la somme des degrés impairs d'un graphe est paire.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in X_i} d(n) &= \sum_{n \in X_i} (d(n) - 1) + \sum_{n \in X_i} 1 \\ &= \underbrace{\sum_{n \in X_i} (d(n) - 1) + |X_i|}_{(c)} \end{aligned}$$

or, $\forall n \in X_i, d(n) = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ ($d(n)$ est impair). Donc, $d(n) - 1 = 2k, k \in \mathbb{N}$ ($d(n)-1$ est pair). Donc (c) est paire (comme (a)). Donc $|X_i|$ est pair. Autrement dit, le nombre de sommet de degré impair est pair.

Exercice 3 - Chaîne élémentaire

Soit $G = (X, E)$ un graphe, soit $p = (x_1, e_1, x_2, \dots, x_k, e_k, x_{k+1})$ la plus courte chaîne entre x_1 et x_k . Supposons que p n'est pas une chaîne élémentaire. Alors il existe un sommet $z \in X$ qui apparaît deux fois dans la chaîne. Donc $\exists(i, j) \in [1, k^2]$ tel que $i < j$ et $x_i = x_j$. Donc $(x_i, e_i, \dots, x_{j-1}, e_{j-1}, e_j)$ est un cycle. On peut donc le retirer de la chaîne. On forme donc la chaîne $p' = (x_1, e_1, \dots, x_i, e_j, x_{j+1}, \dots, x_{k+1})$. Comme la taille minimal d'un cycle est 3, nous avons $|p| > |p'|$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Exercice 4 :

Definition Un graphe est dit simple s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples.

1. Montrer que le degré d'un sommet est toujours strictement inférieure à n .

Preuve : Soit x un sommet. Il y en a $n - 1$ autres ; donc au plus $n - 1$ d'entre eux sont adjacents à x , c'est-à-dire $d_G(x) \leq n - 1$.

2. Montrer qu'il ne peut pas y avoir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n - 1$.

Preuve : Si un sommet x est de degré $n - 1$, alors il est adjacent à $n - 1$ autres, c'est-à-dire à tous les autres ; par conséquent, tous ces autres, qui sont adjacents à x , sont de degré ≥ 1 .

3. En déduire qu'il n'y a au moins deux sommets de même degré.

Preuve : Supposons que les degrés soient deux à deux différents. Ils forment une suite $d_1 < d_2 < \dots < d_n$. On a $d_1 \geq 0$ et $d_n < n$. Comme ces d_i sont entiers, cela donne $d_1 = 0, d_2 = 1, \dots, d_n = n - 1$ cela contredit 2. Donc il y a au moins deux sommets qui ont le même degré.

Exercice 5 :

Faire exemple avec un graphe contenant un triangle. Faire ensuite un exemple d'un graphe contenant pas de triangles.

1. Montrer $n_x + n_y \leq n - 2$.

Preuve : Soit X_x l'ensemble des sommets $X - \{x, y\}$ qui sont adjacents à x , et soit X_y l'ensemble des sommets $X - \{x, y\}$ qui sont adjacents à y . Supposons que $z \in X_x \cap X_y$. Alors x, y, z qui sont mutuellement adjacents, forment un triangle, contradiction. Donc $X_x \cap X_y = \emptyset$. On a aussi $X_x \cup X_y \subseteq X - \{x, y\}$ par définition. Donc

$$n_x + n_y = |X_x| + |X_y| = |X_x \cup X_y| \leq |X - \{x, y\}| = n - 2.$$

2. En déduire que

$$m \leq \frac{n^2}{4}$$

Preuve : L'induction sur $n = |X|$

Initialisation :

Vrai pour $n = 1$ et $n = 2$:

$$\begin{aligned}
n = 1 : |E| = 0 &\leq \frac{1}{4} = \frac{|X^2|}{4} \\
n = 2 : |E| \leq 1 &\leq \frac{4}{4} = \frac{|X^2|}{4}
\end{aligned}$$

Supposons la propriété vraie pour n . Montrons qu'elle l'est pour $n + 2$. Soit $|X| = n + 2$. S'il n'y a pas d'arêtes, alors $|E| = 0 \leq |X^2|/4$. S'il y a au moins une arête, prenons deux sommets adjacents x et y . Posons $X' = X - \{x, y\}$, $E' = \{a \in E \mid \text{les deux extrémités de } a \text{ sont en } X'\}$. Le graphe (X', E') est bien sûr sans triangle, et $|X'| = n$. Par l'hypothèse d'induction on a $|E'| \leq |X'|^2/4 = n^2/4$. Les arêtes de E sont :

- celles de E'
- celle entre x et y
- celles entre x et les sommets de X'
- celles entre y et les sommets de X' . Donc $|E| = |E'| + 1 + n_x + n_y$. Comme $|E'| \leq n^2/4$ et $n_x + n_y \leq |X| - 2 = |X'|$ (par 1), on obtient

$$|E| \leq n^2/4 + 1 + n = \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n + 2)^2}{4}$$

Donc la propriété est aussi vraie pour $n + 2$. Par induction, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.