

Contrôle Continu 1

Mathématiques discrètes.

26/03/2009.

Exercice 1 (5 pts)

Considérons un groupe de Cinq personnes : Sirius, Véga, Pollux, Venus et Orion. On s'intéresse à la relation d'amitié entre les membres de ce groupe :

- Sirius possède trois amis.
- Véga possède un seul ami.
- Pollux possède deux amis.
- Venus possède deux amis.
- Orion possède trois amis.

1. Dire comment représenter cette situation par un graphe? (1 pt)
2. Est-il possible de construire un graphe satisfaisant les données du problème? justifier par une propriété vue dans le cours. (2pts)
3. Démontrer cette propriété. (2 pts)

Exercice 2 (5 pts)

Soit $G = (X, E)$ un graphe orienté donné par sa matrice d'adjacence :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Tracer G . (1 pt)
2. Pour chaque sommet déterminer ses degrés intérieur et extérieur. (1 pt)
3. En utilisant la matrice d'adjacence, déterminer le nombre de chemins de longueur 3 dont l'origine est x_i et la destination est x_j ($\forall x_i, x_j \in X$). (2 pts)
4. Trouver tous les chemins de longueur 3 démarrant de x_1 vers x_4 . (1 pt)

Exercice 3 (10 pts)

Définition 1 On dit qu'un graphe G est de la classe \mathcal{A}_k s'il existe dans G un ensemble de k arêtes dont la suppression produit un arbre.

1. Soit un graphe $G = (X, E)$, ($|X| = n$, $|E| = m$) Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : (6 pts)

(i) G appartient à la classe \mathcal{A}_k .

(ii) G est connexe et possède $n - 1 + k$ arêtes.

(iii) G est connexe, $m \geq n - 1 + k$ et G n'est plus connexe après la suppression de $k + 1$ arêtes.

2. Donner un exemple de graphe appartenant à \mathcal{A}_k avec $n = 6$ et $k = 3$. (2 pts)

3. Soit K_n la clique à n sommets (c'est à dire le graphe simple non-orienté avec toutes les arêtes possibles). Pour quelle valeur de k , K_n serait dans la classe \mathcal{A}_k ? (2 pts)