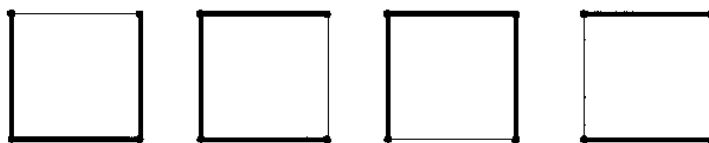


Math Discrete - TD3 Graphe

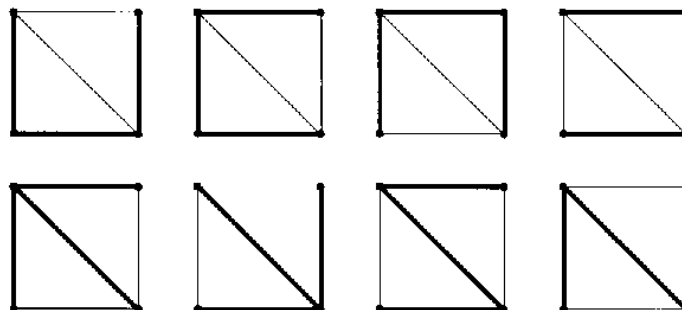
Corrigé

1 Arbres couvrants

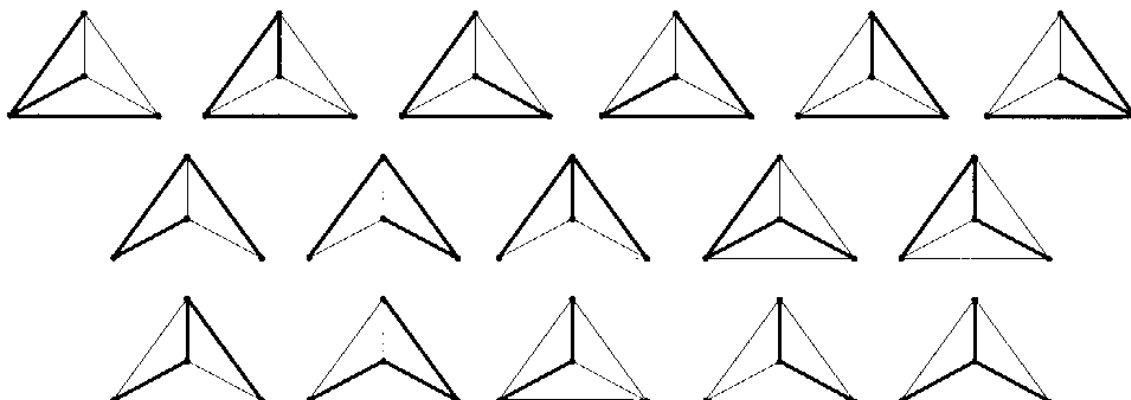
- nous obtenons 4 arbres couvrants pour le premier graphe :



- 8 arbres couvrants pour le deuxième graphe :



- et 16 arbres couvrants pour le troisième graphe :



2 k-connexité et arête-connexité

Théorème de Menger : Un graphe G tel que $n \geq k + 1$ est k -connexe si et seulement si deux sommets distincts quelconques de G sont reliés par k chaînes sommets-disjointes (c'est-à-dire sans autres sommets communs que leurs extrémités).

Soit $G = (X, E)$ un graphe

1. Montrons que $k'(G) \leq \delta_G$:

Soit x un sommet de degré δ_G . Si on enlève à G toutes les arêtes incidentes à x , on a un graphe non connexe (x est isolé). Il est donc suffisant de retirer δ_G pour rendre G non connexe. Or $k'(G)$ est le plus petit nombre d'arêtes dont le retrait rend G non connexe, d'où $k'(G) \leq \delta_G$.

2. Montrons que $k(G) \leq k'(G)$

Par définition de $k(G)$, G est $k(G)$ -connexe.

Comme G a n sommets, il suffit d'enlever au plus $n - 1$ sommets pour rendre G non connexe ou réduit à un seul élément. Donc $k(G) \leq n - 1$.

Prenons un ensemble minimal E' d'arêtes dont le retrait rende G non connexe. Il existe ainsi deux sommets x et y de X qui ne soient pas reliés dans $G' = (X, E - E')$. D'après le théorème de Menger, comme G est $k(G)$ -connexe, x et y sont reliés par $k(G)$ chaînes sommet-disjointes. Or, si des chaînes sont sommets-disjointes (n'ont pas de sommet en commun sauf ceux des extrémités) elles sont a fortiori arêtes-disjointes. Il existe donc dans G $k(G)$ chaînes reliant x et y et n'ayant aucune arête en commun.

Comme x et y ne sont pas reliés dans G' , cela implique que E' contient au moins une arête de chaque chaîne reliant x et y . Du fait que les arêtes de ces chaînes sont distinctes on en déduit que E' contient au moins $k(G)$ arêtes, c'est-à-dire $|E'| \geq k(G)$.

Comme E' est un ensemble *minimal* d'arêtes qui rend G non connexe on a donc $k(G) \leq k'(G)$.

3 Matrices d'adjacence

Démonstration récursive :

Hypothèse de récurrence, la matrice M^k correspond au nombre de chemin entre x_i et x_j .

Initialisation pour $k = 1$ évidente, si il existe une arête, alors il existe un chemin ne contenant qu'une arête (donc de longueur 1) et il est unique (donc le terme de la matrice est égal à 1). Si il n'existe pas d'arête, alors pas de chemin. Donc le terme de la matrice est égal à 0.

Cherchons pour le cas $k + 1$ en considérant que le cas k est valide.

Nous avons $M^{k+1} = M^k \times M$. Le terme i, j est calculé par la formule : $(a.b)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (a_{i,k} \cdot b_{k,j})$.

Le terme $a_{i,k}$ contient par hypothèse de récurrence le nombre de chemin entre le sommet x_i et le sommet x_k . Le terme $b_{k,j}$ venant de la matrice d'adjacence, il représente la présence d'un arc entre le sommet x_k et le sommet x_j (valeur 0 ou 1). La somme parcourt les termes de $b_{1,j}$ à $b_{n,j}$ qui représente tous les arcs pouvant arriver à x_j . Un chemin ne peut pas contenir 2 arcs arrivant à x_j . Donc on peut découper l'ensemble des chemins arrivant à x_j en l'union pour chaque arc arrivant à x_j de tous les chemins passant par cet arc. En terme de quantité, l'union devient la somme des chemins par rapport au dernier arc. Montrons que la somme calculé par le produit matriciel correspond à cette somme.

- Cas 1 : $b_{k,j} = 0$. Alors il n'y a pas d'arc entre x_k et x_j . Donc il n'y a pas de chemin tel que l'arc $\{x_k, x_j\}$ soit le dernier arc. La contribution en nombre de chemin du coefficient k est donc nul. Comme $b_{k,j} = 0$, on a bien la contribution 0 : $a_{i,k} \times b_{k,j} = 0$.
- Cas 2 : $b_{k,j} = 1$. Alors il existe une arête entre x_k et x_j . Donc tous chemin qui passe par x_k peut être prolonger en chemin vers x_j en lui rajoutant l'arête $\{x_k, x_j\}$. Comme $a_{i,k}$ représente le nombre de chemin entre x_i et x_k , il existe $a_{i,k}$ chemin vers x_j dont la dernière arête est $\{x_k, x_j\}$. Comme $b_{k,j} = 1$, on a bien la contribution $a_{i,k}$: $a_{i,k} \times b_{k,j} = a_{i,k}$.

Donc la somme du produit matriciel correspond à la somme de tous les chemins arrivant à x_j .

Remarque : pour formaliser un peu plus, on peut noter $p_{i,j}(k)$ l'ensemble des chemins de x_i vers x_j passant par l'arc $\{x_k, x_j\}$ et montrer que $p_{i,j}(k) = (a_{i,k}.b_{k,j})$.

4 Orientation des graphes

Chaque arête peut être orientée dans 2 sens (une arête \Rightarrow 2 arcs possibles). Soit une liste ordonnée de m éléments pouvant prendre 2 valeurs. Alors l'énumération de tous les combinaisons possibles de listes donne 2^m liste ordonnée possible. En combinatoire, on parle d'arrangement avec répétition. On veut placer 2 objets dans m emplacements, les objets apparaissant plusieurs fois.

Si le graphe n'est pas simple :

1. Présence d'arête multiple : ne change rien au résultat (il peut y avoir plusieurs arcs de même sens entre deux sommets).
2. Présence de boucle : Dans ce cas, une arête = un arc (comme on boucle sur soi-même il ne peut y avoir qu'un sens). Si l'on partitionne l'ensemble E des arêtes en E_b les arêtes boucles et E_a les arêtes normales (ou tout simplement les non-boucles). Alors on construit $2^{|E_a|}$ graphes orientés possible.

5 Graphe réduit

1. Voir dessin. Les composantes fortement connexes sont $\{a, b, c, e\}$, $\{d, g\}$, $\{h, i, j\}$ et $\{f\}$.
2. Par l'absurde :

Supposons qu'il existe un circuit $C = \{s_1, s_2, \dots, s_k, s_1\}$ dans le graphe réduit (donc $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ sont les sommets représentant une décomposition en composante fortement connexe). Donc : $\forall (s_i, s_j) \in C$, le chemin entre s_i et s_j existe. Donc par définition l'ensemble des sommets $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ est une composante fortement connexe. Donc si l'on prend un sommet quelconque $x \in s_1$ et un sommet quelconque $y \in s_2$, il sont reliés par un chemin. Donc les composantes $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ ne sont pas fortement connexes, car elles ne sont pas maximales sur l'ajout de sommet. Contradiction.

6 Décomposition en blocs

Définition : Un point d'articulation d'un graphe G est un sommet tel que $G - \{x\}$ ait une composante connexe de plus. (équivalence avec les isthmes pour les arêtes).

– Les blocs définissent une partition de l'ensemble des arêtes de G :

– D'abord, montrons que toute arête fait parti *au moins* d'un bloc :

Supposons qu'il existe une arête qui ne soit pas dans un bloc. Alors, ceci veut dire que les deux sommets x et y qui sont les extrémités de cette arête ne sont pas dans le même bloc. Soit x dans le bloc B_i et y dans le bloc B_j . Comme un bloc est maximal sur les points d'articulation, l'ajout de y dans B_i crée forcément un point d'articulation. Si y était relié à d'autres sommets que x dans B_i , l'ajout de y ne créerait pas de point d'articulation, ce qui n'est pas possible. Donc y n'est relié qu'à x et x est le point d'articulation qu'engendre l'ajout de y dans B_i . En faisant un raisonnement similaire symétrique, y est le point d'articulation qu'engendre l'ajout de x dans B_j . Soit C le sous-graphe composé uniquement des sommets x et y . Comme vu précédemment, l'ajout d'un sommet connecté à x (autre que y) rend x point d'articulation du sous-graphe C . Inversement avec les sommets connectés à y . Donc le sous-graphe C est un bloc. Donc l'arête entre x et y est dans un bloc. Contradiction.

– Ensuite, montrons que toute arête fait parti *au plus* d'un bloc :

- C'est une conséquence directe (voire une reformulation) de la démonstration à venir. Si deux blocs n'ont en commun qu'au plus un sommet, alors ils ne peuvent pas partager une arête.
- Deux blocs n'ont en commun qu'au plus un sommet qui est alors point d'articulation de G :
 - N'avoir en commun qu'un seul sommet :
 Supposons que deux blocs B_i et B_j ont plus de 2 sommets en commun. Soient x et y deux sommets parmi les sommets en commun. Les blocs sont connexes, donc il existe une chaîne entre tous les sommets de B_i et x et entre tous les sommets de B_j et x (raisonnement équivalent pour y). Donc, pour tous sommets du bloc B_i , il existe au moins 2 chaînes vers tous sommets du bloc B_j , celle passant par x et celle passant par y . Si on ajoute dans B_i un sommet z de B_j relié à x , alors x doit devenir point d'articulation (car un bloc est maximal sur cette propriété). Or, il existe toujours la chaîne passant par y pour relier les sommets de B_i à z . Donc le bloc B_i n'est pas maximal sur les points d'articulation. Contradiction.
 - Que ce sommet en commun soit point d'articulation du graphe initial
 Maintenant que l'on sait qu'il n'y a qu'un sommet en commun entre deux blocs, soit x ce sommet pour les blocs B_i et B_j . Le fait de rajouter un sommet de B_j connecté à x dans B_i transforme x en point d'articulation. Soit C le sous-graphe engendré de G contenant les sommets de B_i et de B_j . C est connexe, par définition (le sommet x était partagé), donc entre chaque sommet de C il existe une chaîne. Or, comme le fait de rajouter x à l'un des blocs le transforme en point d'articulation, on en déduit que dans C toute chaîne entre un sommet quelconque de B_i et un sommet quelconque de B_j passe par le sommet x . C étant un sous-graphe de G , cette chaîne existe aussi dans G . Supposons qu'il existe dans G des chaînes entre un sommet de B_i et un sommet de B_j qui ne passent pas par x . Dans ce cas, cela signifie qu'entre chaque sommet de B_i et B_j , il existe au moins deux chaînes dans G (celle passant par x et notre supposition). Donc le sous-graphe engendré C de G n'est pas un bloc et est contenu dans un plus grand bloc. Donc les sous-graphes de C ne sont pas des blocs pour G . Contradiction, car B_i et B_j sont des sous-graphes de C qui sont des blocs de G . Donc il n'existe qu'une chaîne dans G entre un sommet de B_i et un sommet de B_j (celle qui passe par x) et x est point d'articulation du graphe G .
 - Tout point d'articulation de G est un sommet commun à au moins deux blocs de G :
 Supposons qu'il existe un point d'articulation p qui n'existe que dans un seul bloc B_i . Comme toute arête est dans un bloc, les arêtes connectées à p ne sont que dans B_i , sinon p appartiendrait aussi à un autre bloc. Donc tous les sommets connectés à p sont dans B_i . p étant point d'articulation du graphe, il existe au moins 2 sommets directement liés à p qui seraient déconnectés sans p (en effet, si tous les sommets reliés à p étaient reliés entre eux autrement que par p , p ne serait pas un point d'articulation). Ces 2 sommets sont dans le bloc B_i , donc p est aussi un point d'articulation de B_i . Contradiction, un bloc ne possède pas de point d'articulation.

7 Arbre

Démonstration numérique

Autrement dit, tout arbre a moins deux sommets de degré 1.

Dans un arbre il n'y a pas de sommets de degré 0, sinon il ne serait pas connexe.

Nous avons la propriété $m = n - 1$ et la propriété $\sum_{x \in X} d(x) = 2m$. Donc $\sum_{x \in X} d(x) = 2(n - 1)$

Notons X_1 l'ensemble des sommets de degré 1. Par commodité, nous noterons $X' = X \setminus X_1$ (les autres sommets). Comme chaque sommet de X_1 est de degré 1, alors $\sum_{x \in X_1} d(x) = |X_1|$. De plus

$$n = |X_1| + |X'|. \text{ Donc } |X_1| + \sum_{x \in X'} d(x) = 2(|X_1| + |X'| - 1). \text{ Donc } |X_1| = \left(\sum_{x \in X'} d(x) \right) - 2(|X'| - 1).$$

Comme dans X' chaque éléments est au moins de degré 2, $\sum_{x \in X'} d(x) \geq \sum_{x \in X'} 2$. Donc $\sum_{x \in X'} d(x) \geq 2|X'|$. Donc $|X_1| \geq 2|X'| - 2(|X'| - 1)$. Donc $|X_1| \geq 2$.

Démonstratique theorique

Soit $G = (S, A)$ un arbre, alors G est connexe. Soit $c = \{s_0, \dots, s_k\}$ une chaîne simple de longueur maximale. s_0 est différent de s_k , car G ne contient pas de cycle. De plus $d(s_0) \geq 1$ et $d(s_k) \geq 1$, car les deux appartiennent à la chaîne. Supposons $d(s_0) > 1$, il y aurait un s' différent de s_1 tel que l'arête $a = (s_0, s')$ appartiendrait à A . Par conséquent, $c + a$ serait une chaîne plus longue que c , ce qui mène à une contradiction. Raisonement identique pour s_k . Donc, s_0 et s_k sont de degré 1.

8 Degrés

Sommet	Degré extérieur (sortant)	Degré intérieur (entrant)
1	3	0
2	2	2
3	1	0
4	1	3
5	0	2
6	1	1

9 Arborescence

Le nombre d'arborescences : n^{n-1}

Dans un arbre particulier on peut avoir n arborescences (car on choisit à chaque fois une racine). Donc il suffit de trouver le nombre d'arbres construits avec n sommets. Autrement, dit le nombre d'arbre couvrant d'un graphe complet de n sommets. Il existe une formule (pas simple à démontrer je trouve) qui dit que l'on a n^{n-2} arbres couvrants pour un graphe complet K_n .

Comme $n^{n-2} * n = n^{n-1}$, on a bien que le nombre d'arborescences est n^{n-1}