On rappelle qu'il est toujours possible de déterminiser un automate fini :

Théorème 1. *Étant donné un automate fini $\mathcal{A}$, il est possible de construire un automate fini déterministe (et complet) $\widehat{\mathcal{A}}$ tel que $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.*

Autrement dit, le non-déterminisme n'apporte aucun pouvoir d'expression ; il est cependant légitime de se demander s'il permet davantage de concision.
Pour trancher cette question, il nous faut une mesure de la complexité des automates finis. On définit donc la **taille** d'un automate fini $\mathcal{A}$ comme son nombre d'états.

Question 1. *Soit un automate $\mathcal{A}$ de taille n. En étudiant la preuve du Théorème 1, donner une borne sur la taille du plus petit automate déterministe reconnaissant le même langage.*

On chercher maintenant à prouver que cette borne est parfois atteinte ; autrement dit, on cherche à montrer qu'asymptotiquement, le non-déterminisme permet d'obtenir des automates de taille exponentiellement plus petite que si l'on ne s'autorisait que des automates déterministes.
Pour cela, on va considérer, pour chaque $n \geq 1$, le langage $\mathcal{L}_n$ sur $\Sigma := \{a, b\}$ décrit par l'expression rationnelle $(a+b)^\star a(a+b)^{n-1}$.

Question 2. *Pour chaque n, construire un automate fini non-déterministe $\mathcal{A}_n$ de taille $n+1$ reconnaissant le langage $\mathcal{L}_n$.*

Question 3. *Déterminisez l'automate $\mathcal{A}_3$. Quelle est sa taille ? Généralisez ce constat (sans preuve) à un n quelconque.*

Question 4. *Expliquez pourquoi constater que "l'automate déterministe obtenu par l'application du Théorème 1 à $\mathcal{A}_n$ est exponentiellement plus large que $\mathcal{A}_n$" ne permet pas de conclure.*

On va donc considérer, pour $n \geq 1$, un automate déterministe complet $\mathcal{D}_n$ reconnaissant $\mathcal{L}_n$, et montrer que $\mathcal{D}_n$ est de taille au moins 2^n.

Question 5. *Soit u, v deux mots différents sur l'alphabet Σ, de longueur exactement n. Expliquer pourquoi les (uniques) exécutions de $\mathcal{D}_n$ sur u et v ne peuvent pas terminer dans le même état.*
Indication : *puisque u et v sont différents, il existe au moins une position i telle que $u_i = a$ et $v_i = b$ (ou l'inverse).*

Question 6. *En déduire qu'asymptotiquement, les automates non-déterminismes peuvent être exponentiellement plus concis que les automates déterministes.*