On cherche à répondre à la question suivante : étant donné un langage régulier $\mathcal{L}$, son language complémentaire $\overline{\mathcal{L}} := \Sigma^\star \setminus \mathcal{L}$ est-il lui aussi toujours régulier ?

Question 1. *Considérons les langages réguliers décrits par les expressions rationnelles suivantes sur l'alphabet* $\Sigma := \{a, b, c\}$ *:*

1. $E_1 := \Sigma^\star a$
2. $E_2 := (\Sigma\Sigma)^\star$
3. $E_3 := \Sigma^\star bc\Sigma^\star$

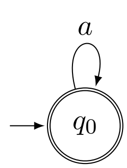
Pour chacune de ces expressions rationnelles, donnez une expression rationnelle décrivant le langage complémentaire. Semble-t-il y avoir un moyen simple de passer d'une expression rationnelle à une expression définissant son langage complémentaire ?

On va donc attaquer cette question par le biais des automates. On se souviendra du Théorème de Kleene :

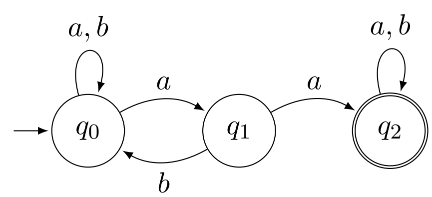
Théorème. *Un langage est capturé par une expression rationnelle si et seulement s'il est reconnu par un automate fini, et les traductions sont effectives.*

Considérons donc un automate fini $\mathcal{A}$ capturant un langage $\mathcal{L}$.

Question 2. *Proposez une méthode naïve pour transformer l'automate* $\mathcal{A}$ *en un automate* $\overline{\mathcal{A}}$ *reconnaissant le langage* $\overline{\mathcal{L}}$*.*



(a) L'automate $\mathcal{A}_1$



(b) L'automate $\mathcal{A}_2$

FIGURE 1 – Deux automates sur l'alphabet $\Sigma := \{a, b\}$.

Question 3. *Appliquez cette procédure aux deux automates représentés en Figure 1. Fonctionne-t-elle ? Quel semble être la source du problème pour l'automate* $\mathcal{A}_1$ *? Et pour* $\mathcal{A}_2$ *?*

Question 4. *Supposons maintenant notre automate* $\mathcal{A}$ *deterministe et complet. Prouvez que dans ce cas, la procédure est correcte, et construit bien un automate* $\overline{\mathcal{A}}$ *reconnaissant* $\overline{\mathcal{L}}$*.*

Question 5. *Établir que la classe des langages réguliers est close par complémentation, i.e. que si un langage est régulier, alors son complémentaire l'est aussi.*