L'objectif de ce TD est de démontrer le théorème d'élimination des epsilon-transitions :

Théorème. *Étant donné un automate fini $\mathcal{A}$ avec epsilon-transitions, il est possible de construire un automate fini $\widehat{\mathcal{A}}$, sans epsilon-transitions, qui lui est équivalent.*

On va commencer par se faire la main sur l'automate $\mathcal{A}_{\text{ex}}$ représenté en Figure 1, avant de généraliser la preuve.

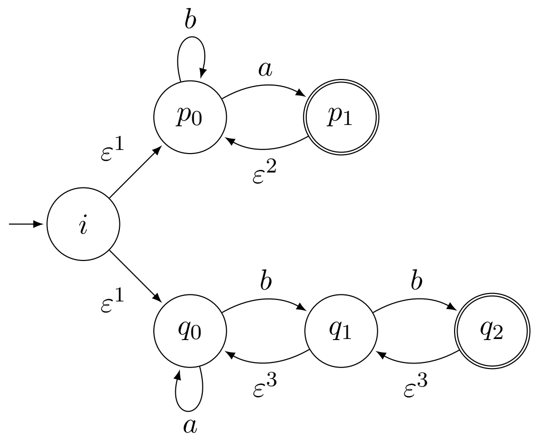

Figure 1 – L'automate $\mathcal{A}_{\text{ex}}$, défini avec epsilon-transitions sur l'alphabet $\Sigma := \{a, b\}$. Les exposants sur les ε sont à ignorer pour l'instant.

Question 1. *Décrivez le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{ex})$ reconnu par l'automate $\mathcal{A}_{ex}$.*

On va maintenant éliminer petit-à-petit les epsilon-transitions de $\mathcal{A}_{\text{ex}}$, afin d'arriver à l'automate $\widehat{\mathcal{A}_{\text{ex}}}$. Outre l'élimination des epsilon-transitions, les seules opérations qu'on s'autorise pour passer de $\mathcal{A}_{\text{ex}}$ à $\widehat{\mathcal{A}_{\text{ex}}}$ sont l'ajout de nouveaux états initiaux, et l'ajout de nouvelles transitions. En particulier, on ne touchera pas à l'ensemble des états, et on ne modifiera pas les transitions non-ε existantes.

Question 2. *(Élimination des deux epsilon-transitions ε^1) Que se passe-t-il si l'on retire les epsilon-transitions ε^1 sans modifier l'ensemble des états initiaux de $\mathcal{A}_{ex}$? Proposez un nouvel ensemble d'états initiaux pour $\widehat{\mathcal{A}_{ex}}$.*

Question 3. *(Élimination de l'epsilon-transition ε^2) Quel est le problème si l'on retire l'epsilon-transition ε^2 dans $\mathcal{A}_{ex}$? Modifiez $\widehat{\mathcal{A}_{ex}}$ en conséquence.*

Question 4. *(Élimination des deux epsilon-transitions ε^3) Quelle est la difficulté supplémentaire apportée par l'élimination des transitions ε^3 ? Modifiez $\widehat{\mathcal{A}_{ex}}$ en conséquence.*

À ce stade, on devrait avoir construit un $\widehat{\mathcal{A}_{\text{ex}}}$ sans epsilon-transitions, tel que $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{A}_{\text{ex}}}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_{\text{ex}})$. On va maintenant appliquer cette technique à un automate quelconque.
Dans la suite, on considère un automate fini $\mathcal{A} := (\Sigma, \mathcal{Q}, \mathcal{I}, \mathcal{F}, \mathcal{T})$, où $\mathcal{T} : \mathcal{Q} \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(\mathcal{Q})$. On se propose de construire l'automate $\widehat{\mathcal{A}} := (\Sigma, \mathcal{Q}, \widehat{\mathcal{I}}, \mathcal{F}, \widehat{\mathcal{T}})$.

Question 5. *Expliquez brièvement, étant donné un ensemble d'états $S \subseteq \mathcal{Q}$, comment calculer l'ensemble $\texttt{clôture}_\varepsilon(S)$ des états atteignables depuis S en suivant un nombre quelconque (zéro ou plus) d'epsilon-transitions.*

Question 6. *En vous inspirant de la Question 2, proposez une définition pour $\widehat{\mathcal{I}}$, l'ensemble des états initiaux de $\widehat{\mathcal{A}}$.*

Question 7. *En vous inspirant de la Question 4, proposez une définition pour $\widehat{\mathcal{T}} : \mathcal{Q} \times \Sigma \to \mathcal{P}(\mathcal{Q})$, la fonction de transition de $\widehat{\mathcal{A}}$.*

Question 8. (☠) *Enfin, démontrez que les automates $\mathcal{A}$ et $\widehat{\mathcal{A}}$ reconnaissent bien le même langage. On procédera par double-inclusion entre $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{A}})$.*
Indications :

- *(i) On pourra commencer par l'inclusion $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$, qui est plus simple.*
- *(ii) Dans l'autre sens, on cherchera une bonne manière de découper en tronçons une exécution acceptante*
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$
de $\mathcal{A}$, pour faire apparaître une exécution acceptante, sur le même mot, de $\widehat{\mathcal{A}}$. Pour cela, on pourra distinguer, parmi les $a_1, \cdots, a_n$, les lettres de Σ des epsilons.

Question 9. *On a fait le choix, dans la procédure construisant $\widehat{\mathcal{A}}$ à partir de $\mathcal{A}$, de lire d'abord une lettre de Σ, puis un nombre quelconque d'epsilon-transitions. Aurait-on pu faire différemment ? Expliquez, sans refaire la preuve d'équivalence, cette construction alternative de $\widehat{\mathcal{A}}$.*