Question 1. *Écrivez une expression rationnelle qui capture chacun des langages suivants. On commence par considérer l'alphabet* $\Sigma := \{a, b, c\}$ *:*

1. *Le langage* $\mathcal{L}_1$ *des mots commençant par* ab
2. *Le langage* $\mathcal{L}_2$ *des mots qui commencent et terminent par la même lettre*
3. *Le langage* $\mathcal{L}_3$ *des mots de longueur paire*
4. *Le langage* $\mathcal{L}_4$ *des mots de longueur impaire et commençant par* ab
5. *Le langage* $\mathcal{L}_5$ *des mots dans lesquels aucun* c *n'est plus à gauche qu'un* b
6. *Le langage* $\mathcal{L}_6 := \{u \in \Sigma^\star : \ |u|_c \text{ est un multiple de } 3\}$

Passons maintenant à l'alphabet $\Sigma := \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ *:*

7. *Le langage* $\mathcal{L}_7 := \{u \in \Sigma^\star : \ 5 \text{ divise } \overline{u}^{10}\}$
8. *Le langage* $\mathcal{L}_8$ *des mots ne contenant pas le facteur* 42

Question 2. *Sur l'alphabet* $\Sigma = \{a, b, c\}$*, remplissez la première colonne du tableau suivant avec une expression rationnelle qui vérifie les contraintes indiquées. Dans la longueur de l'expression, on ne comptera pas les* $\cdot$ *(mais les parenthèses,* $+$ *et* $\star$ *comptent).*
Un exemple est fourni sur la première ligne.

E	***Dans*** $\mathcal{L}(E)$ ***:***	***Pas dans*** $\mathcal{L}(E)$ ***:***	***Longueur maximale de*** E
$b^\star$	ε, bbb	a	*2*
	$\varepsilon, aa, aaaa$	a, aaa	*5*
	$a, aa, aaa, aaaa$	ε, b	*3*
	$\varepsilon, aaabbb, aaaabb$	ba	*4*
	$abaab, bbab, bbb$	$acca, c$	*6*

Question 3. *Réfutez les assertions suivantes :*

- *Pour tout* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^\star$*,* $(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)^\star = \mathcal{L}_1^\star + \mathcal{L}_2^\star$
- *Pour tout* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^\star$*,* $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^\star = \mathcal{L}_1^\star \cdot \mathcal{L}_2^\star$
- *Pour tout* $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^\star$*,* $(\overline{\mathcal{L}})^\star = \overline{\mathcal{L}^\star}$

Question 4. (☠☠☠) *Sur l'alphabet* $\Sigma := \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$*, écrivez une expression rationnelle qui capture le langage*

$$\mathcal{L} := \{u \in \Sigma^\star : \ 3 \text{ divise } \overline{u}^{10}\}.$$

Teasing : on verra bientôt en cours une manière plus simple de reconnaître ce langage.