TD n^{o}1

1. Un graphe G d'ordre 7, à 10 arêtes a six sommets de degré a et un sommet de degré b. Que valent a et b ? De plus, si l'on considère que G est simple que vaut b ?

2. Soit G un graphe d'ordre 12, à 14 arêtes dont les sommets sont de degré 2 ou 3. Combien G a-t-il de sommets de degré 2 ?

3. Vous invitez 5 personnes. A chacune vous demandez combien d'invités elle connait. Vous obtenez 5 réponses différentes. Est-ce possible ?

4. Montrer que parmi 6 personnes, il y en a au moins 3 qui se connaissent mutuellement ou au moins 3 qui ne se connaissent pas mutuellement. (par mutuellement on entend deux à deux)

5. Montrer que tout graphe non orienté simple d'ordre n, $n \geq 2$ a au moins deux sommets de même degré.

6. Un graphe non orienté simple d'ordre 4 peut-il avoir trois sommets de degré 3 et un sommet de degré 1 ?

7. On dit qu'une suite d'entiers naturels $k_1, \cdots, k_n$ est graphique s'il existe un graphe non orienté simple d'ordre n tel que ses sommets $x_1, \cdots, x_n$ ont respectivement les degrés $k_1, \cdots, k_n$. Les suites ci-dessous sont-elles graphiques ?

- $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 0, 0$
- $7, 6, 2, 2, 2, 1, 0, 0$
- $5, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1$
- $3, 3, 2, 2, 2, 2, 1$

Montrer que pour tout $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ la suite $x, 1, 2, 3, 5, 5$ n'est pas graphique.

Théorème 1 (**Havel-Hakimi**) *: une suite* **décroissante** *d'entiers naturels $k_1 \geq \cdots \geq k_n$ avec $n \geq 2$ et $k_1 \geq 1$ est graphique ssi la suite $k_2 - 1, k_3 - 1, \cdots, k_{k_1+1} - 1, k_{k_1+2}, \cdots k_n$ est graphique. (on a supprimé k_1 puis on a retranché 1 aux k_1 premiers termes)*

Ce théorème fournit un algorihtme pour déterminer si une suite est graphique ou non. (cherchez les cas de base)

8. Dessiner un graphe non orienté simple dont l'ensemble des degrés des sommets est $\{0, 4, 5\}$.

9. Le complément d'un graphe non orienté simple $G = (X, E, \varphi)$ est le graphe $G^c = (X, E^c, \varphi_c)$ tel que deux sommets sont adjacents dans G^c ssi ils ne sont pas adjacents dans G.

9.1 Comment formuler le problème de l'exercice 4 en terme de graphe utilisant la notion de graphes complémentaires.

9.2 Un graphe G non orienté simple est dit autocomplémentaire si G est isomorphe à G^c. Montrer que si G, d'ordre n, est autocomplémentaire alors $n \equiv 0 \, ou \, 1 \; modulo \, 4$.

10. Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Le graphe de Petersen est le graphe non orienté défini comme suit : les sommets sont les paires déléments de A et xy est une arête ssi $x \cap y = \emptyset$. Par exemple $\{01\}$ et $\{23\}$ sont adjacents et $\{01\}$ et $\{13\}$ ne sont pas adjacents.

Déterminer l'ordre de ce graphe, le degré de chaque sommet, le nombre d'arêtes et le diamètre de ce graphe.

Dessiner ce graphe. Est-il planaire ? Quel est son nombre chromatique ?

11. Un chimiste veut transporter des produits chimiques $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{X}$ dans des caisses. Mais certains produits ne peuvent se côtoyer sous peine de réaction dangereuse : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ réagissent entre eux, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ réagissent chacun avec $\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{X}$ réagit avec $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Trouver le nombre minimal de caisses nécessaires au transport.

12. Un commissariat doit effectuer 8 surveillances selon des horaires fixés par le tableau suivant

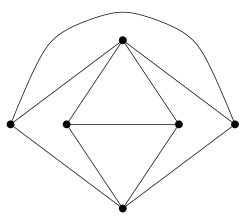
surveillance n^o	1	2	3	4	5	6	7	8
début	5	15	8	7	3	13	11	19
fin	10	18	18	12	14	21	20	23

Quel sera le nombre minimal de policiers nécessaires ? (remarque : dans les horaires de début et de fin sont comptabilisées les déplacements depuis ou bien jusqu'au commissariat).

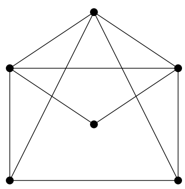
13. Soit G un graphe non orienté simple d'ordre n. Montrer que si G est biparti alors $m \leq \dfrac{n^2}{4}$.

14. Trouver une représentation planaire du graphe $K_5 - e$ où e est une arête quelconque de K_5.

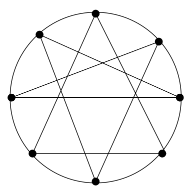
15. Soit $\chi(G)$ le nombre chromatique d'un graphe simple. L'algorithme glouton de coloration des sommets consiste à suivre une liste des sommets et à les colorier dans l'ordre avec le plus petit entier disponible. Appliquer le sur les graphes suivants :



G



H



Γ

Cet algorithme donne-t-il toujours le nombre chromatique ?