Option Théorie de l'information et logique — Mai 2007

corrigé

1. Théorie de l'information

1.1 codage de source *Soit* $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ *un alphabet de source avec la loi de probabilité suivante* : $\bullet p(a) = 0,12 \bullet p(b) = 0,28 \bullet p(c) = 0,01 \bullet p(d) = 0,05 \bullet p(e) = 0,04$ $\bullet\ p(f) = 0,25 \bullet p(g) = 0,15 \bullet p(h) = 0,1$

Appliquer l'algorithme de Shannon-Fano et calculer la longueur moyenne du code obtenu.

On trouve $a = 010, b = 11, c = 00000, d = 0001, e = 00001, f = 10, g = 011, h = 001$

et

$m = 0,12\times3+0,28\times2+0,01\times5+0,05\times4+0,04\times5+0,25\times2+0,15\times3+0,1\times3 = 2,62$

1.2 codage de source *Soit* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ *un alphabet de source avec la loi de probabilité suivante :* $p(a) = 2/16, p(b) = 3/16, p(c) = 1/16, p(d) = 4/16, p(e) = 5/16, p(f) = 1/16$

1.2.1 *Calculer* $H(A)$.

$$\begin{aligned} H(A) &= -(2/16\log_2(2/16) + 3/16\log_2(3/16) + 1/16\log_2(1/16) + 4/16\log_2(4/16) \\ &\quad +5/16\log_2(5/16) + 1/16\log_2(1/16) \\ &= 2/16\times3 + 3/16\times(-\log_2 3 + 4) + 1/16\times4 + 4/16\times2 + 5/16\times(-\log_5 3 + 4) + 1/16\times4 \\ &= 2,35 \end{aligned}$$

1.2.2 *Appliquer l'algorithme de Huffman et calculer la longueur moyenne du code obtenu.*

On trouve après application de l'algorithme

$a = 001,\ b = 01,\ c = 0000,\ d = 10,\ e = 11,\ f = 0001$ et

$M = 2/16\times3 + 3/16\times2 + 1/16\times4 + 4/16\times2 + 5/16\times2 + 1/16\times4 = 2,37$

Quelle serait la longueur des mots d'un code à longueur fixe ?

Il faut n bits d'informations tel que $2^n \geq 6$ donc il faut 3 bits d'information et donc un code de longueur fixe 3.

1.3 codage de canal

1.3.1 *Que représentent les valeurs d'une matrice d'un canal symétrique ?*

Chaque valeur représente une probabilité conditionnelle d'une lettre de sortie du canal sachant la lettre d'entrée du canal.

1.3.2 *On considère le code de Hamming avec la matrice suivante* $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le mot à transmettre est 1001. Comment sera-t-il codé ?

On multiplie H par le vecteur 0001001 pour trouver le préfixe du mot à coder

On reçoit le mot 1001101. Décodez-le.

On multiplie H par le vecteur 1001101 pour trouver le bit à changer dans le décodage.

2. Logique

2.1 *Vous êtes en présence des deux jumeaux Dupont et Durand de caractère tellement semblable qu'ils disent ensemble la vérité ou bien qu'ils mentent ensemble. Ils vous disent*
- *le premier jumeau : "Je suis Dupont ou je suis est agent secret au service de sa Majesté"*
- *le deuxième jumeau : " Je suis Dupont ou mon jumeau est un menteur"*

On posera dt1="le premier jumeau est Dupont", dt2="le deuxième jumeau est Dupont" et ag= "le premier jumeau est agent secret au service de sa Majesté".

Qui est Dupont ?

La formule équivalente à l'affirmation du premier est $\varphi_1 = dt1 \vee ag$.

La formule équivalente à l'affirmation du deuxième est $\varphi_2 = dt2 \vee \neg(dt1 \vee ag)$.

Ce qui donne la table de vérité suivante

dt1	dt2	ag	φ_1	φ_2
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Les seules lignes à conserver sont celles où les deux formules ont la même valeur de vérité : dans ces trois lignes on voit que dt2 est toujours vrai donc le deuxième jumeau est Dupont.

2.2 *Soient*
- *P un symbole de relation à deux arguments qui sera interprété ainsi :*
  $P(x, y)$ *signifie "x est le père de y",*
- *M un symbole de relation à deux arguments qui sera interprété ainsi :*
  $M(x, y)$ *signifie "x est la mère de y",*
- *H un symbole de relation à un argument qui sera interprété ainsi :*
  $H(x)$ *signifie "x est de sexe masculin".*

2.2.1 *Ecrire une formule de ce langage qui exprime que toute personne a une grand-mère.*

$\forall x \exists y(\neg H(y) \wedge \exists z[(H(z) \wedge P(z,x) \wedge M(y,z)) \vee (\neg H(z) \wedge M(z,x) \wedge M(y,z))])$

(y est la grand-mère de x et il faut l'existence de z qui est soit père de x et fils de y, soit mère de x et fille de y)

2.2.2 *Que signifie la formule suivante* $\neg \exists x(H(x) \wedge \exists y\ M(x,y))$

Il n'existe pas de personne de sexe masculin qui soit mère de quelqu'un.

2.3 *Trouver le langage et les formules pour exprimer*
– *tout électeur est majeur*
– *certaine(s) personne(s) majeure(s) ne sont pas des électeur(s)*
Soient

- Maj un symbole de relation à un argument qui sera interprété par "Maj(x) signifie x est majeur(e)",

- Elec un symbole de relation à un argument qui sera interprété par "Elec(x) signifie x est électeur(trice)",

La première assertion se traduit par $\forall x(Elec(x) \longrightarrow Maj(x))$.

La deuxième assertion se traduit par $\exists x(Maj(x) \wedge \neg Elec(x))$.