# VI

# Un fondement des mathématiques

**Patrick CEGIELSKI.**
Professeur à l'Université Paris XII

L'objet de cet article est d'exposer à la fois pourquoi nous avons besoin d'un fondement des mathématiques et comment nous en sommes arrivés au modèle prédominant actuellement. Ce modèle dominant, comme les autres, pose encore des problèmes, appelés *problèmes métamathématiques*, dont l'exposition fera l'objet d'un autre article dans cette même collection.

Le fondement que nous choisissons est le plus en vogue actuellement, à savoir en gros la *théorie des ensembles formelle de Zermelo-Fraenkel*. Celui-ci n'est qu'un fondement parmi ceux qui sont possibles, et donc parmi ceux qui existent effectivement, qui ne diffèrent en général que par le choix des axiomes, ou quelquefois pour des raisons plus profondes (comme pour l'*intuitionnisme*). Notre but n'est pas ici de comparer les différents fondements (ce sera également l'objet d'un autre article) mais bien de montrer les réussites et les problèmes à propos d'un fondement donné. En effet on ne peut bien comparer les différents fondements que si l'on en a analysé au moins un de façon complète.

Le problème du fondement des mathématiques est souvent regardé avec dédain par la plupart des mathématiciens, qui le considèrent comme une activité *philosophique* (dans un sens péjoratif), convenable seulement pour ceux qui, certes dotés d'un bon esprit de synthèse, ne sont pas néanmoins assez créatifs pour s'occuper de

**RÉSUMÉ** — Nous montrons pourquoi et comment nous en sommes arrivés au fondement des mathématiques le plus utilisé aujourd'hui, à savoir la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel.
**Mots-clés** : axiomatisation, fondements des mathématiques, formalisation, Zermelo-Fraenkel.

**ABSTRACT** — We show why and how we arrive to the Zermelo-Fraenkel set theory as a foundation of mathematics.
**Key words** : axiomatisation, fondations of mathematics, formalisation, Zermelo-Fraenkel.

la science en marche. Nous montrerons au passage que ce point de vue n'est absolument pas justifié, pour ne pas dire néfaste. En effet, les problèmes posés à propos des fondements, et surtout certaines de leurs solutions, ont des retombées sur les mathématiques, pratiquement dans toutes ses disciplines, que ce soit sur un plan méthodologique ou celui du renouveau des points de vue.

Un fondement des mathématiques peut se caractériser par sa *présentation*, c'est-à-dire le choix des objets de base et des hypothèses, par le *développement* du corpus des mathématiques connues à partir de celle-ci et, enfin par les *problèmes* liés à ces façons de faire. C'est ce plan que nous allons suivre. Commençons cependant par dire quelques mots sur la *créativité* en mathématiques, phénomène qui n'est jamais pris en compte lors de l'étude du fondement des mathématiques mais qui est essentiel au développement de celles-ci.

## PRÉLIMINAIRES

### 1.1 Émergence des disciplines mathématiques

Il ne faut pas confondre *fondement* des mathématiques et *émergence* des différentes disciplines mathématiques. Les différentes disciplines mathématiques ont été créées pour des besoins divers : l'arithmétique est certainement liée à la comptabilité et au développement de la monnaie dans les premières cités de l'Histoire ; on connaît la belle légende rapportée par Hérodote (vers 484-420 av. J.-C.) selon laquelle la naissance de la géométrie est liée aux crues du Nil ; Descartes (1596-1650) a créé la géométrie analytique pour résoudre un problème de Pappus (IV$^{e}$ s.) ; les séries de Fourier (1768-1830) apparaissent pour résoudre le problème des cordes vibrantes et pour étudier la propagation de la chaleur ; la théorie des nombres a des origines ludiques à propos de nombres…

Il n'est pas de notre propos ici de rechercher l'origine de l'émergence des diverses disciplines ou chapitres des mathématiques. C'est un sujet extrêmement intéressant qui dépasse le cadre de notre article.

On ne peut s'intéresser aux fondements des mathématiques que lorsqu'un certain nombre de disciplines mathématiques ont émergé et que lorsqu'on a considéré que ces disciplines ont trouvé un facteur commun tel qu'on puisse les ranger toutes dans une discipline plus générale appelée mathématiques. Là encore, ce ne sera pas un sujet que nous aborderons ici.

### 1.2 La créativité en mathématiques

Nous allons nous intéresser, dans ce qui suit, aux fondements des mathématiques, c'est-à-dire en quelque sorte à une présentation unifiée du corpus des mathématiques. Mais, bien entendu, la présentation n'est pas le seul aspect de l'activité des mathématiques. Nous venons d'ailleurs de rappeler que l'un de ses aspects est de reconnaître le caractère mathématisable de tel ou tel phénomène et de créer un nouveau chapitre des mathématiques. Les deux aspects les plus importants des mathématiques sont certainement la **créativité** et la cristallisation des méthodes d'exposition comme **formalisme**.

Ces aspects sont complémentaires, et développer l'un sans l'autre ne conduirait qu'à une discipline aride. En ce qui concerne le premier aspect : à quoi bon trouver un résultat si on ne sait pas le communiquer ? Combien de résultats ont été *retrouvés* en conduisant à des querelles, tout simplement parce que la présentation du premier inventeur ne devint compréhensible qu'après que le second ait fait un effort de pédagogie. En ce qui concerne le deuxième aspect : à quoi bon savoir bien présenter s'il n'y a rien à exposer ?

Le formalisme sert à communiquer mais aussi à enseigner, ceci explique peut-être pourquoi il a fait l'objet de nombreux travaux. L'étude de la créativité, quant à elle, est beaucoup plus récente. Bien qu'elle ne fasse pas l'objet de cet article, disons-en quelques mots.

Alors que le formalisme est depuis longtemps enseigné, tout au moins sous sa forme la plus rudimentaire (dégager les définitions des théorèmes ; classifier ceux-ci en lemme, proposition, théorème proprement dit, corollaire, fait et autre scholie ; choisir des notations adaptées...), la créativité a été longtemps considérée comme un don sur lequel il n'y avait rien à dire. Il est vrai aussi que révéler comment tel résultat fut trouvé consiste, pour un chercheur, à donner aux autres chercheurs plus qu'une méthode, un moyen pour trouver peut-être avant soi de nouveaux résultats dans la même veine... Cela semble inconcevable dans le contexte d'une rivalité acharnée.

Les premières études consacrées à la créativité de façon générale furent le fait de psychologues. On peut citer Théodule Ribot[1] (1839-1916) et Frédéric Paulhan[2] (1856-1931) au début du vingtième siècle. Laisant, avec une enquête effectuée en 1902[3], et Henri Poincaré[4] (1854-1934), avec un article publié la même année repris en livre en 1908, commencent à étudier la créativité mathématique. Jacques Hadamard[5] (1865-1963) y consacre un livre entier en 1945.

1 RIBOT, Théodule, *L'imagination créatrice*, Alcan, 1900.

2 PAULHAN, Frédéric, *Psychologie de l'invention*, Paris, 1901.

3 *L'enseignement Mathématique*, tome IV (1902) et tome VI (1904).

4 POINCARÉ, Henri, *Science et méthode*, Flammarion, 1908, 314 p., p.43-63.

5 HADAMARD, Jacques, *The psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, 1945, Dover, 1954, Oxford University Press, 1955 ; traduction française revue et augmentée par l'auteur *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Albert Blanchard, 1959, 135 p. ; rééd. Gauthier-Villars, 1972, rééd. Gabay, 1993, comprenant l'essai de Poincaré.

Georges Pólya[6] essaya d'enseigner la créativité mathématique dans une série de livres, et lui donna un nom, à savoir l'**heuristique**. L'heuristique fut elle-même renouvelée par l'arrivée de l'informatique. De nos jours elle concerne les méthodes informatiques de résolution de problèmes dont la justification n'est pas rigoureuse mais dont l'efficacité est reconnue[7].

## PRÉSENTATION DES MATHÉMATIQUES

L'activité mathématique — qu'importe ce que l'on entend exactement par là — est ancienne. La présentation des résultats mathématiques, pour la divulgation ou l'enseignement, a varié. La présentation actuelle ne se comprend bien que replacée dans une perspective historique indiquant les modes dominants du passé, leur intérêt et les raisons de leur rejet. C'est ce que nous allons faire ici.

### 2.1 La méthode idiosyncrétique

Nous ne nous intéresserons pas ici à l'origine des (disciplines) mathématiques, ni aux premiers résultats, mais uniquement à la façon dont ils sont présentés. Encore faut-il disposer de documents (historiques) pour cela.

#### 2.1.1 Les documents

Il n'est pas non plus dans notre propos ici de faire de l'historiographie des découvertes des documents mathématiques. Il nous suffira de savoir que les premiers documents dont nous disposons sont les *tablettes babyloniennes* et les *papyrus égyptiens*.

6 PÓLYA, Georges, *Mathematics and plausible reasoning, vol.1 Induction and analogy in mathematics*, Princeton university Press, 1954, paperback 1990, XVI+280 p.

PÓLYA, Georges, *Mathematics and plausible reasoning, vol.2 Patterns of plausible inference*, Princeton university Press, 1954, 2nd ed. 1968, paperback 1990, X+225 p.

PÓLYA, Georges, *Les mathématiques et le raisonnement « plausible »*, Gauthier-Villars, 1958, XVI+299 [tr. fr. partielle (pas d'exercices) des deux volumes *Mathematics and plausible reasoning*].

PÓLYA, Georges, *How to solve it*, Princeton University Press,1945, 2nd ed. 1957 ; traduction française *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, 1962, XX+237 p., rééd. GABAY, 1989.

PÓLYA, Georges, *Mathematical discovery*, vol.1, Wiley, 1962. ; traduction française *La découverte des mathématiques, tome 1 : les modèles*, Dunod, Collection Sigma n° 9, 1967, XXIII+127+64 p.

PÓLYA, Georges, *Mathematical discovery*, vol.II, Wiley, 1964 ; traduction française *La découverte des mathématiques, tome 2 : une méthode générale*, Dunod, Collection Sigma n° 9, 1967, VIII+pp.130-360+S65-96.

7 PEARL, Judea, *Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*, Addison-Wesley, 1985, traduction française **Heuristique**, Cépadués, Toulouse, 1991, 400 p.

Les **tablettes babyloniennes** datent d'environ 1800 à 1600 av. J.-C. Là aussi qu'importe comment on le sait ; le lecteur intéressé se reportera aux introductions des sources des documents de référence[8].

Le **papyrus Rhind**, notre principale source d'informations sur les mathématiques de l'ancienne Égypte, date d'environ 1650 av. J.-C.[9].

La plupart des manuels d'histoire des mathématiques citent des extraits commentés de ces documents.

### 2.1.2 La méthode d'exposition

Une fois obtenue la traduction de ces documents (ce qui, pour les historiens, n'est pas non plus une mince affaire), que faut-il en comprendre ? En particulier, essayons de dégager, des documents à notre disposition (n'oublions pas que la plupart ont été détruits), la méthode d'exposition et d'enseignement des résultats connus. Nous ne possédons pas, malheureusement, d'ouvrage de l'époque sur la théorie d'enseigner.

Le papyrus Rhind contient 85 problèmes copiés par le scribe Ahmes sur un travail plus ancien. Tous les problèmes sont numériques, et beaucoup d'entre eux sont très faciles. En général, chaque problème est formulé, puis une solution est détaillée étape par étape en se servant des valeurs numériques données au début. Bien que le problème soit résolu pour ce jeu de données, on pressent cependant que cela illustre une procédure plus générale, un *algorithme* comme nous dirions de nos jours. Par contre aucune justification n'est fournie.

Les tablettes mathématiques babyloniennes sont de deux types, les *tables* et les *problèmes*. Il existe à peu près 500 000 tablettes réparties dans les musées du monde entier ; mais seulement 100 tablettes de problèmes et 200 de tables ont été étudiées. Les tables sont très variées, telles les tables de multiplication, de réciproques (pour réduire la division à des multiplications), de carrés, de racines carrées, de cubes, de racines cubiques, d'intérêts composés, et beaucoup d'autres. Les problèmes sont d'une grande diversité, et sont tous plus ou moins concernés par la formulation et la résolution de problèmes algébriques et géométriques. Un

8 THUREAU-DANGIN, F., *Textes mathématiques babyloniens*, Leyde, Brill, 1938, in *Ex Oriente Lux*, vol.1.
NEUGEBAUER, Otto & SACHS, A.J., *Mathematical Cuneiform Texts*, New Haven, *American Oriental Society*, 1945, in *Am. Oriental Series*, vol. XXIX.
NEUGEBAUER, Otto, *The Exact Sciences in Antiquity*, 1957, 2nd ed., 1969 ; tr. fr. *Les sciences exactes dans l'Antiquité*, Actes Sud, 1990, 319 p.

9 CHACE, A.B. & BULL, L. & MANNING, H.P. & ARCHIBALD, R.C., *The Rhind Mathematical Papyrus*, Mathematical Association of America, vol.1 1927, vol.2 1929, reprinted 1979. [La référence, avec traduction anglaise.]
ROBINS, Gay & SHUTE, Charles, *The Rhind Mathematical Papyrus*, British Museum Publications, 90 p., 1987. [Pour une vue plus rapide.]

grand nombre de ces tablettes, comme dans le papyrus Rhind, formulent un problème à propos de données numériques particulières et procèdent étape par étape jusqu'à l'obtention de la solution. De tels textes se terminent souvent par la phrase « telle est la procédure ». Ceci montre bien que c'est la procédure générale, et non le résultat numérique, qui est considérée comme important. Ainsi, si dans une multiplication un des facteurs est 1, la multiplication par 1 sera explicitement effectuée, car cette étape est importante dans le cas général. Les autres textes de problèmes contiennent sur une seule tablette un grand nombre de problèmes numériques d'un même genre, soigneusement arrangés du plus simple au plus compliqué. Cela correspond visiblement à nos listes d'exercices.

Cette méthode d'exposition est ce qu'on appelle la **méthode idiosyncrétique** : on indique de faire comme ceci sans justification et sans critique possible. On retrouve encore cette méthode dans l'enseignement à l'école primaire et pour l'enseignement de certaines disciplines, surtout technologiques, même à un niveau avancé.

#### 2.1.3 L'obtention des résultats

Nous avons vu comment les résultats étaient exposés. Certains nous paraissent même d'un niveau avancé (par exemple la résolution des équations du second degré sur des tablettes babyloniennes). Comment étaient-ils obtenus ?

Nous ne possédons aucun témoignage. Nous ne pouvons donc ici que conjecturer. Bien sûr, les tablettes contenant les justifications ont pu être perdues. Mais en fait on a tout lieu de croire que la méthode utilisée est la **méthode empirique**, ou par *essais et erreurs*.

En effet, si beaucoup de résultats sont exacts, certains autres sont faux. Par exemple une formule égyptienne pour trouver l'aire d'un disque est de prendre les huit neuvièmes du diamètre du disque. Les Babyloniens calculaient l'aire d'un quadrilatère de côtés successifs $a$, $b$, $c$, $d$ par la formule $A = (a+c)(b+d)/4$, qui, en fait, n'est valable que pour les rectangles.

### 2.2 La méthode déductive

On ne connaît pas précisément l'origine de la notion de *démonstration*, ni celle de la classification des méthodes pour convaincre en *méthode déductive* (utilisation du *raisonnement*) ou en *méthode inductive* (passer du particulier au général grâce à des *lois*). Mais on peut apporter les renseignements suivants.

#### 2.2.1 Origine de la méthode déductive

Notre source d'information principale sur le début des mathématiques grecques est le *Sommaire eudémien* de Proclus (412-485). Ce sommaire constitue que, soit parce qu'ils sont charmés par de telles lois (argument esthétique), soit parce que de telles lois leur facilitent le calcul des aires (argument pratique), ils en font des recueils.

Le nombre de ces lois devint très vite important et fit donc un appel important à la mémoire pour les retenir. On peut supposer qu'un géomètre particulièrement astucieux découvrit alors qu'en fait, certaines de ces lois se déduisent de certaines autres, sans avoir besoin de sortir de chez soi pour faire des relevés, et ce, avec le seul secours du *raisonnement*. La notion de *théorème* est née à ce moment et inaugure l'époque d'une méthode nouvelle, celle de la *méthode déductive*.

Une certaine lecture de Proclus laisse supposer que Thalès (640-546 av. J.-C.) serait l'un des premiers à avoir donné une démonstration :

> De même que la connaissance exacte des nombres prit naissance chez les Phéniciens du fait des échanges commerciaux et des affaires, de même est-ce chez les Égyptiens que fut, pour la raison que j'ai dite, inventée la géométrie. Thalès fut le premier Grec à rapporter d'Égypte cette matière à spéculation ; lui-même l'enrichit de nombreuses découvertes, et légua à ses successeurs les principes de nombreuses autres en allant plus loin tantôt dans la généralisation abstraite, tantôt dans l'investigation empirique.
> [...]
> C'est Thalès qui le premier, à ce qu'on prétend, démontra que le diamètre partage le cercle en deux parties égales.
> [...]
> Il faut rendre grâce à l'antique Thalès, entre autres découvertes, pour celle du théorème suivant : car on dit qu'il fut le premier à découvrir et à énoncer que les angles à la base de tout triangle isocèle sont égaux, bien qu'il ait appelé semblables, selon une terminologie plus ancienne, les angles qui sont égaux.

(*In Primum Euclidis Elementarum Librum Commentarii*, éd. Friedlein, 65-3, 157-10, 250-20 ; tr. fr. *Les Présocratiques*, La Pléiade, Gallimard, 1988 ; tr. fr. par Maurice Caveing, *Les éléments d'Euclide, livres I à IV*, P.U.F., 1990, 531 p., pp.89-92.)

Cependant, le fait d'énoncer un théorème n'implique pas qu'on en donne une démonstration. Peut-être ne s'agissait-il tout simplement que d'une loi. C'est certainement à cette époque, néanmoins, que naît la notion de démonstration.

### 2.2.2 Méthode inductive et méthode déductive

Mais si les géomètres font des démonstrations, ils ne s'interrogent pas en général sur la façon de les faire. Quelques-uns donnent bien des méthodes remarquables de démonstrations, de façon isolée, mais il semble qu'avant le philosophe quelques pages du *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide* de cet auteur[10]. Il s'agit d'un très bref tour d'horizon du développement de la géométrie grecque depuis le début jusqu'à Euclide (III^e^ s. av. J.-C.). Proclus vivait au cinquième siècle après J.-C., mais il avait encore accès à un nombre de travaux critiques et historiques qui sont perdus depuis. Parmi ceux-ci figurait une histoire de la géométrie par un élève d'Aristote (384-322 av. J.-C.), Eudème, d'où il tira son sommaire.

Il est probable que la notion de **démonstration** naisse à propos de la géométrie, comme nous allons le voir.

Celle-ci resta longtemps empirique. L'historien grec Hérodote[11] pense que la géométrie (de *géo* terre, et *metros* mesure, c'est-à-dire l'arpentage) est née en Égypte :

> « Ce roi [Sésostris], disaient les prêtres, partagea le sol entre tous les Égyptiens, attribuant à chacun un lot égal aux autres, carré, et c'est d'après cette répartition qu'il établit ses revenus, prescrivant qu'on payât une redevance annuelle. S'il arrivait que le fleuve enlevât à quelqu'un une partie de son lot, celui-là venait le trouver et lui signalait ce qui s'était passé ; lui envoyait des gens pour examiner et mesurer de combien le terrain était amoindri, afin qu'il fût fait à l'avenir une diminution proportionnelle dans le paiement de la redevance fiscale. C'est ce qui donna lieu, à mon avis, à l'invention de la géométrie, que les Grecs rapportaient dans leur pays. »
>
> (Hérodote, II, 109)

Remarquons qu'ici le terme « carré » ne fait pas référence à un type de figure géométrique spécifique mais à une partie du plan dont on peut déterminer l'aire. On peut supposer que les premiers géomètres égyptiens découvrirent dans les formes de leurs champs des figures remarquables (en ce sens qu'elles sont esthétiques, ou plus certainement dont l'aire est simple à mesurer) qu'ils appellent *triangle, rectangle, cercle, ovale*… On peut supposer de plus qu'ils définissent ces figures par analogie, comme on le fait de nos jours à l'école primaire. On peut penser aussi, que de ce fait, ils découvrent des propriétés remarquables telles que celle de Pythagore (VI^e^ s. av. J.-C.) [dans un triangle rectangle la somme des carrés des deux côtés adjacents à l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse] en remarquant cette propriété pour un champ en forme de triangle rectangle, puis qu'ils la rencontrent pour un autre et qu'alors ils généralisent cette propriété pour en faire une **loi** (de la même façon que nous dégageons les lois de la physique élémentaire). On peut enfin croire

10 PROCLUS, *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduction, introduction et notes de Paul Ver Eecke. Desclées de Brouwer, Bruges. 1948.

11 HÉRODOTE, *L'enquête*, dit aussi *Histoires*, in Hérodote & Thucydide, *Œuvres complètes*, La Pléiade n° 176, 1904 p.

grec Aristote, aucun ne fasse d'étude systématique. Après la mort de celui-ci, ses élèves rassemblèrent un certain nombre de ses écrits sous le nom d'**Organon**, c'est-à-dire *instrument* (sous-entendu des sciences). Aristote écrit fièrement :

> « Dans le cas de toutes les découvertes les résultats des premiers chercheurs qui ont été transmis à d'autres ont été améliorés peu à peu par ceux qui les ont reçus, tandis que les découvertes originales font généralement une avancée qui est minime à première vue, bien que beaucoup plus utile que les développement ultérieurs. Car, comme on dit, en chaque chose : « le premier pas est le principal », et pour cette raison aussi le plus difficile. [...]
> De cette enquête, cependant, aucun travail n'avait été fait auparavant. Rien n'existait du tout. »

[Aristote, *Sophisticis Elenchis* 34, 183b 17-23 et 34-36 ; tr. fr. de Jean Tricot, *Les réfutations sophistiques*, Vrin, rééd. 1995, 155 p., p.137-138]

Nous renvoyons aux manuels d'histoires de la logique classique pour une atténuation de la dernière phrase d'Aristote. Le mot *logique* lui-même ne fut utilisé dans son sens actuel que plus tard. Ainsi Chrysippe (281-208 av. J.C., ancien stoïcien) divisait la philosophie en trois branches dont l'une est nommée *ta logika theōrœmata* : les théorèmes logiques. Cicéron (103-43 av. J.-C.), qui avait recueilli l'enseignement des stoïciens, emploie le terme (latinisé) avec le sens que nous lui donnons aujourd'hui. Auparavant, la *logique* était appelée *dialectique* (Platon, 427-348 av. J.-C.) ou *analytique* (Aristote).

Aristote distingua la méthode déductive de la méthode inductive. Il fut le premier à faire remarquer la distinction, et il commença à élaborer la théorie de la méthode déductive. Bien entendu, il ne faisait que réfléchir à des méthodes qui existaient déjà, mais que personne avant lui n'avait mises en avant :

> Nous n'apprenons que par induction ou par démonstration. Or la démonstration se fait à partir de principes universels, et l'induction, de cas particuliers. Mais il est impossible d'acquérir la connaissance des universels autrement que par induction, puisque même ce qu'on appelle les résultats de l'abstraction ne peuvent être rendus accessibles que par l'induction, ce que, à chaque genre, appartiennent, en vertu de la nature propre de chacun, certaines propriétés qui peuvent être traitées comme séparées, même si en fait elles ne le sont pas. Mais induire est impossible pour qui n'a pas la sensation : car c'est aux cas particuliers que s'applique la sensation ; et pour eux, il ne peut y avoir de science, puisqu'on ne peut la tirer d'universels sans induction, ni l'obtenir par induction sans la sensation.

[Aristote, *Analyticorum posteriorum*, I,18 ; tr. fr. par Jean Tricot *Les seconds analytiques*, Vrin, rééd. 1987, 251 p., p.96-97. ]

## 2.3 La méthode axiomatique

### 2.3.1 Notion

Aristote est le premier à dégager la notion d'*axiome* :

> J'entends par [premiers] principes dans chaque genre, ces vérités dont l'existence est impossible à démontrer. La signification du nom est simplement posée, aussi bien pour les vérités premières que pour les attributs qui en dérivent. Quant à l'existence, s'il s'agit de principes, il faut nécessairement la poser ; mais s'il s'agit du reste, il faut la démontrer. Par exemple, nous posons indifféremment la signification de l'unité, du droit et du triangle ; mais, alors qu'on pose aussi l'existence de l'unité et de la grandeur, pour le reste, on doit la démontrer.
>
> Parmi les premiers principes dont on se sert dans les sciences démonstratives, les uns sont propres à chaque science, et les autres sont communs : mais c'est une communauté d'analogie, étant donné que leur usage est limité au genre tombant sous la science en question.- Sont des principes propres, par exemple les définitions de la ligne et du droit ; les principes communs sont des propositions telles que : *si, de choses égales, on ôte des choses égales, les restes sont égaux.* Mais l'application de chacun de ces principes communs est limitée au genre dont il s'agit, car il aura la même valeur, même s'il n'est pas employé dans sa généralité, mais appliqué, en Géométrie par exemple, aux grandeurs seulement, ou, en Arithmétique, aux nombres seulement. - Sont propres encore à une science, les sujets dont elle pose aussi l'existence et dont elle considère les attributs essentiels : tels sont les unités en Arithmétique, et, en Géométrie, les points et les lignes. En effet, ces sujets sont posés à la fois dans leur existence et dans leur signification, tandis que pour leurs attributs essentiels, c'est seulement la signification de chacun d'eux qui se trouve posée. Par exemple, l'Arithmétique pose la signification de pair et d'impair, de carré et de cube, et la Géométrie celle d'irrationnel, ou de ligne brisée ou oblique ; par contre, l'existence de ces notions est démontrée, tant à l'aide des axiomes communs qu'à partir des conclusions antérieurement démontrées. L'Astronomie procède aussi de la même façon. - C'est qu'en effet, toute science démonstrative tourne autour de ces trois éléments : ce dont elle pose l'existence (c'est-à-dire le genre dont elle considère les propriétés essentielles) ; les principes communs, appelés **axiomes**, vérités premières d'après lesquelles s'enchaîne la démonstration ; et, en troisième lieu, les propriétés, dont la science pose, pour chacune, la signification. Cependant, quelques sciences peuvent, sans inconvénient, négliger, certains de ces éléments : par exemple, telle science

peut se dispenser de poser l'existence du genre, si cette existence est manifeste (c'est ainsi que l'existence du nombre n'est pas aussi évidente que celle du froid et du chaud) ; on peut encore ne pas poser la signification des propriétés quand elles sont claires. De même, pas n'est besoin de poser la signification d'axiomes communs tels que : *si de choses égales on soustrait des choses égales, les restes sont égaux*, attendu que c'est là un principe bien connu. Mais il n'est pas moins vrai que, par nature, les éléments de la démonstration sont bien au nombre de trois : le sujet de la démonstration, les propriétés qu'on démontre, et les principes dont on part.

N'est ni une hypothèse, ni un postulat, ce qui nécessairement par soi et qu'on doit nécessairement croire. « Je dis : *qu'on doit nécessairement croire* », parce que la démonstration, pas plus que le syllogisme, ne s'adresse au discours extérieur, mais au discours intérieur de l'âme. On peut, en effet, toujours trouver des objections au discours extérieur, tandis qu'au discours intérieur on ne le peut pas toujours. - Ce qui, tout en étant démontrable, est posé par le maître de la démonstration, c'est là, si on l'admet avec l'assentiment de l'élève, une **hypothèse**, bien que ce ne soit pas une hypothèse au sens absolu, mais une hypothèse relative seulement à l'élève. Si l'élève n'a aucune opinion contraire, cette même supposition est alors un **postulat**. Et de là vient la différence entre l'hypothèse et le postulat : le postulat est ce qui est contraire à l'opinion de l'élève, démontrable, mais posé et utilisé sans démonstration.

Les définitions ne sont pas des hypothèses (car elles ne prononcent rien sur l'existence ou la non-existence) ; mais c'est dans les prémisses que rentrent les hypothèses. Les définitions requièrent seulement d'être comprises, et cela n'est certes pas le fait de l'hypothèse. Il y a hypothèse, au contraire, quand certaines choses étant posées, du seul fait que ces choses sont posées la conclusion suit. Pas davantage il ne faut admettre que le géomètre pose des hypthèses fausses, ainsi que l'ont soutenu certains, qui prétendent que, bien qu'on ne doive pas employer le faux, le géomètre s'en sert cependant quand il affirme que la ligne tracée est d'un pied de long, ou est droite, alors qu'elle n'est ni d'un pied de long, ni droite. En réalité, le géomètre ne tire aucune conclusion du fait de la ligne particulière dont il parle, mais seulement des notions que ses figures expriment. - En outre, toute hypothèse, comme tout postulat, est ou universelle ou particulière, tandis que les définitions ne sont ni l'une ni l'autre.

[Aristote, *Analyticorum posteriorum*, i.10, 76 a 30-77 a2 ; tr. fr. par Jean Tricot *Seconds Analytiques*, Vrin, 1987, pp.53-59 ]

### 2.3.2 Application : Euclide

La méthode axiomatique, sous cette forme première, connut l'apogée de son application avec les *Éléments* d'Euclide[12], se rapportant à la géométrie.

### 2.3.3 Euclide comme modèle

Les *Éléments* d'Euclide furent considérés, pendant près de vingt siècles, comme le modèle par excellence de la présentation d'une discipline mathématique insurpassable et même difficilement égalable. Ceci valut pour toutes les sciences et même pour la morale, par l'application qu'en fit Spinoza (1632-1677) dans *Éthique démontrée selon la méthode géométrique* (1677).

### 2.3.4 Les défauts

En fait, les *Éléments* d'Euclide présentent plusieurs insuffisances quant à l'application de la méthode axiomatique. De plus, la méthode axiomatique présente elle-même des défauts, dont on ne prit conscience qu'à la fin du XIXe siècle.

Le premier défaut du traitement d'Euclide est qu'il utilise plusieurs suppositions implicites. Dès la première proposition (« *Un segment de droite étant donné, construire un triangle équilatéral* ») une telle supposition doit être nécessairement ajoutée : soit AB le segment, on trace le cercle de centre A et de rayon AB puis le cercle de centre B et de rayon AB ; ces deux cercles s'intersectent en deux points C et D ; alors ABC est un triangle demandé. Cependant rien, hormis un dessin, ne justifie l'intersection des cercles.

Le deuxième défaut du traitement d'Euclide concerne certaines définitions. Par exemple un point est défini comme « une figure sans étendue », ce qui permet peut-être de se faire une idée de ce que l'on doit entendre par là, mais n'est pas utilisable pour effectuer des démonstrations. En fait, et bien que nous ayons vu ci-dessus qu'Aristote possède les notions d'axiomes et de termes primitifs (ceux que l'on ne peut pas définir), Euclide ne retient que celle d'axiome (et de postulat).

Notons au passage, puisque curieusement je ne l'ai jamais vu noté, qu'Euclide parle d'aire pour la première fois dans une proposition (à propos de la détermination de l'aire d'une figure) sans en donner de définition (même approximative).

12 EUCLIDE, *Euclides opera omnia*, édités par J.L. Heiberg et H. Menge, Leipzig, 8 vol., 1883 à 1916 ; tr. anglaise Heath, Thomas Little, *The thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vol., Cambridge, 1908, 2nd ed. 1926, reprint Dover, 1956 ; tr. fr. part. (sans le livre V ni les livres arithmétiques) Peyrard, 1804, rééd. Albert Blanchard, 1966 ; tr. fr. du texte de Heiberg par Bernard Vitrac, *Les éléments, livres I à IV*, P.U.F., 1990, 531 p.

### 2.3.5 Les géométries non-euclidiennes et la notion de modèle

Il n'est pas question ici d'aborder la question des géométries non-euclidiennes, largement traitée par ailleurs[13].

Le cinquième postulat d'Euclide, tout au moins dans une formulation moderne due à John Playfair (1748-1819), dit que *dans le plan, par un point donné il passe une parallèle et une seule à une droite donnée.*

Notons au passage l'intérêt de ce postulat : on peut mesurer la longueur d'un segment de droite AB directement, grâce à une règle, mais cela est souvent difficile ; une autre façon de faire est de considérer un triangle ABC, de mesurer les côtés AC et BC ainsi que l'angle $\widehat{c}$ : on peut alors reporter le triangle ailleurs (sur un terrain plat, par exemple) et mesurer AB, d'où l'intérêt des cas d'égalité des triangles ; pour un «grand triangle» cette méthode n'est pas pratique, d'où l'intérêt des triangles semblables (puis des formules trigonométriques) ; le cinquième postulat sert à justifier les propriétés des triangles semblables.

Le statut de postulat lui fut contesté dès l'Antiquité et on chercha à le démontrer. On lui trouva beaucoup d'énoncés équivalents, modulo les autres axiomes de la géométrie, par exemple l'énoncé moderne ci-dessus dû à John Playfair, sans arriver à le démontrer. Girolamo Saccheri changea de tactique en 1733 : il nia le cinquième postulat et chercha à aboutir à une contradiction ; il développa ainsi un corpus assez important de géométrie nouvelle mais sans aboutir, à sa grande surprise, à aucune contradiction. Des mathématiciens commencèrent alors à suspecter l'indépendance de cet axiome : Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Johann Bolyai (1802-1860) et Nicolai Ivanovitch Lobatchevsky (1793-1856).

Restait à trouver une méthode pour montrer qu'il en était bien ainsi. On fut conduit à des démonstrations de *consistance relative* : par exemple, si la géométrie euclidienne n'est pas absurde (*i. e.* si elle est exempte de contradiction), alors il en est de même de la géométrie de Lobatchevsky. Ceci se fit grâce à la **méthode des modèles.** Par exemple, pour montrer la consistance relative prise en exemple ci-dessus, on construit un *modèle* de la géométrie de Lobatchevsky dans le plan euclidien, c'est-à-dire en géométrie ordinaire : on considère un ensemble de figures que l'on appelle « points » (ici les points eux-mêmes), un ensemble de figures que l'on appelle « droites » (et qui n'en sont pas en géométrie ordinaire), des relations entre ces types de figures que l'on appelle « appartenance »,… et on montre que, interprétés de cette façon, tous les axiomes et postulats de la géométrie de Lobatchevsky sont vérifiés.

[13] On pourra consulter, par exemple, pour une introduction en français, pour un traitement classique et pour un point de vue moderne respectivement :

CHABERT, Jean-Luc, La vraie fausse démonstration du Cinquième Postulat, in *Histoire de problèmes, Histoire des Mathématiques*, Ellipses, 1993, 432 p., p.277-297.

BONOLA, Roberto, *La geometrica non euclidea*, Bologne, 1906 ; tr. anglaise *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of its Development*, 1912, rééd. Dover, 1955.

GREENBERG, M.J., *Euclidean and non-Euclidean geometries, development and history*, Freeman, 1974.

Eugenio Beltrami (1835-1900) donna la première telle preuve en 1868[14] : il montra, à peu de chose près, la consistance de la géométrie plane de Lobatchevsky sous réserve de la consistance de la géométrie euclidienne dans l'espace. Plus exactement il montra qu'une portion du plan de Lobatchevsky peut être représentée, modulo quelques restrictions, sur une surface de type particulier, dite à courbure négative constante. La démonstration n'est pas complète : Beltrami lui-même conjectura, ce qui a été démontré depuis, qu'aucune surface à courbure constante négative ne peut représenter le plan de Lobatchevsky en son entier.

Henri Poincaré donna plus tard une représentation élémentaire, c'est-à-dire ne faisant pas appel à la géométrie différentielle, du plan lobatchevskyien.

Les démonstrations de consistance obtenues par la méthode des modèles ne sont cependant que des démonstrations de **consistance relative** : pour montrer que la théorie A est consistante à condition que la théorie B le soit, il suffit de considérer un modèle de la théorie B (il en existe un si la théorie B est consistante) puis de construire un modèle de A à partir de celui-ci. Par opposition on commença à parler de **consistance absolue** pour la consistance proprement dite, c'est-à-dire pour l'absence prouvée de contradiction.

### 2.3.6 Pasch et l'importance des termes primitifs

Après la découverte des géométries non euclidiennes, la nécessité d'un traitement axiomatique satisfaisant de la géométrie euclidienne se fit ressentir. Le mathématicien allemand Moritz Pasch (1843-1930) fut le premier à donner un tel traitement en 1882[15] dans une partie de ses cours universitaires consacrée aux fondements de la géométrie. Pour lui, les axiomes sont suggérés par l'observation du monde extérieur. Certes il les classe, mais de façon assez hétéroclite. Dans son exposé Pasch insiste sur la notion de **terme primitif** (sous le nom de *définition implicite*), par exemple les points, les droites, la congruence des segments de droite… pour la géométrie. Les termes primitifs sont précisés par les axiomes.

Ce point de vue sera popularisé par les *Fondements de la Géométrie*[16] de David Hilbert (1862-1943), paru en 1899.

14 BELTRAMI, Eugenio, *Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea*, Giornale di Matematiche, vol. 6, 1868, p.74-105.

15 PASCH, Moritz, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882 ; 2ème éd. Berlin, 1926.

16 HILBERT, David, *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Dekmals in Göttingen, 1899, tr. fr. de L. Laugel enrichie *Les principes fondamentaux de la géométrie*, Gauthier-Villars, 1900 ; *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, 2nde éd., Leipzig, 1903, V-175 p., 3ème éd., 1909, VI-279 p., 4ème éd., 1913, 5ème éd., 1922, 6ème éd., 1923, 7ème éd., Berlin, 1930, VIII-378 p., 8ème éd., Stuttgart, 1956, VIII-251 p., 9ème éd., 1962, VIII-271 p., 10ème éd., 1968, VII-271 p. ; tr. fr. *Les fondements de la géométrie*, édition critique de Paul Rossier, Dunod, 1971, XV+311 p. ; tr. angl. de la seconde éd. par E.J. Townsend, *The Foundations of Geometry*, Open Court, 1902 ; tr. angl. de la dixième éd., Open Court, 1971.

### 2.4 La formalisation

Nous venons de voir le développement de la méthode axiomatique. Au milieu du XIXe siècle cette méthode parut insuffisante pour un fondement rigoureux des mathématiques. C'est alors la naissance des *méthodes formelles.*

#### 2.4.1 Les besoins de méthodes formelles et le modèle de Frege

La naissance de la notion de méthode formelle est précédée par les premières réflexions sur la logique moderne de George Boole (1815-1864), Augustus De Morgan (1806-1871) et Charles Sanders Peirce (1839-1914). La notion même de méthode formelle est cependant le combat d'un seul homme, celui de Gottlob Frege (1848-1925).

Il faut faire deux parts dans l'œuvre de Frege : la réflexion sur le problème *philosophique* de la nature des nombres, et sa réponse mathématique qui a consisté à en donner un exposé *formel* (qui se révèlera incohérent). Remarquons que son plus grand titre de gloire, la création de la logique moderne, ne sera pour lui qu'un sous-produit, un travail initial pour exprimer son arithmétique.

Commençons par le problème philosophique. L'œuvre de Frege fut tout entière animée par une seule intention : celle de construire l'arithmétique par les seules ressources de la pensée pure, c'est-à-dire de la logique. Elle est accomplie dans les deux tomes des *Lois fondamentales de l'arithmétique* de 1893 et 1903[17] : « Avec ce livre, j'exécute un projet que j'avais en vue depuis ma *Begriffschrift* de 1879 et dont je me suis ouvert dans mes *Fondements de l'arithmétique* de 1884. » (Frege, 1893, p.VIII.)

Il faut tout d'abord revenir à la philosophie d'Emmanuel Kant (1724-1804). Kant adhérait à la logique aristotélicienne traditionnelle du sujet et du prédicat ; il pensait que cette logique était complète et non perfectible. Il pensait que

[17] FREGE, Gottlob, *Begriffschrift*, Nebert, Halle, VII+88p., 1879 ; tr. angl. dans VAN HEIJENOORT, Jean, ed., *From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967 (4th printing, 1981, corrected) 1967, pp.1-82 ; tr. fr. de l'avant propos et du premier chapitre dans RIVENC, François et DE ROUILHAN, Philippe, *Logique et fondements des mathématiques: Anthologie (1850-1914)*, Payot, 1992, 447 p., pp.93-129 ; tr. fr. *L'idéographie*, Vrin, 1999.

FREGE, Gottlob, *Grundlagen der Arithmetik*, 1884, Breslau, XIX+119 p. ; 2nde éd., Breslau, 1934 ; 3ème éd. avec tr. angl., New-York, 1950 ; tr. fr. *Fondements de l'arithmétique*, Seuil, 1969, 234 p. (rééd. s.d. [1978]).

FREGE, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik*, vol.1, Jena, 1893.

FREGE, Gottlob, in *Zeitschrift für Philosophie und philosphische Kritik*, (103) 1894 ; tr. fr. *Compte rendu de* Philosohie der Arithmetik I *de E.G. Husserl*, in *Écrits logiques et philosophiques*, Seuil, 1971, 237 p., pp.142-159.

FREGE, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik*, vol.2, Jena, 1903 ; tr. angl. partielle des deux volumes dans GEACH & BLACK, *Philosophical writings of Gottlob Frege*, Blackwell, Oxford, 1952, rééd. 1960 et 1980, pp.117-224 et dans MONTGOMERY, F., *The basic laws of arithmetic*, Berkeley, 1963.

l'on peut distinguer parmi les propositions celles qui contiennent déjà l'attribut dans le sujet, et les autres, qui ne le contiennent pas. Ainsi, « tous les corps ont une étendue » est du premier type, parce que c'est ainsi que « corps » est défini. Ces **propositions** sont appelées **analytiques**. Mais « tous les corps sont pesants » est de l'autre type. La notion d'être un corps n'inclut pas celle d'avoir du poids. Cette proposition est **synthétique**, on peut la nier sans se contredire. Parallèlement à cette distinction entre les propositions, Kant a introduit un autre critère de classification. Il appelle **connaissance *a priori*** la connaissance qui est en principe indépendante de l'expérience. Quant au reste, tout ce qui dérive de l'expérience, est considéré comme ***a posteriori***. Ces deux classifications se recoupent. Kant admet qu'une proposition analytique est *a priori*, mais souligne qu'il peut y avoir des propositions synthétiques *a priori*. Le but de la *Critique de la raison pure*[18] de 1781 est d'établir comment sont possibles les jugements synthétiques *a priori*. Ce qui, ici, est en jeu pour Kant, est la possibilité des mathématiques pures, parce que, selon son point de vue, les propositions mathématiques sont synthétiques *a priori*. L'exemple dont il discute est arithmétique : l'addition de cinq et de sept ; il est tiré sans aucun doute du *Théetète* de Platon, où l'on utilise les mêmes nombres. La proposition que $5 + 7 = 12$ est *a priori*, étant donnée qu'elle n'est pas tirée de l'expérience, et elle est synthétique parce que le concept de douze n'est pas déjà contenu dans les concepts de cinq, sept et addition.

Kant eut une grande influence, mais sa philosophie des mathématiques n'est plus aujourd'hui prédominante[19]. Une interprétation moderne de la pensée de Kant fut donnée par Frege en 1884 (§3) et développée plus tard par l'École de Vienne, et surtout par Rudolph Carnap (1891-1970) dans sa *Constitution du monde*[20] : un jugement est analytique lorsqu'il peut se déduire uniquement des définitions et des principes de la logique ; il est synthétique si sa démonstration (ou sa vérification) suppose d'autres données que les principes logiques et les définitions.

Le problème fondamental de Frege est de savoir si l'arithmétique est analytique, autrement dit de savoir si l'arithmétique est une théorie logique ou une théorie mathématique. Pour répondre à cette question il lui fallait donner un exposé précis de la logique, et c'est ce qu'il allait faire dans sa *Begriffschrift* de 1879 et dans quelques autres travaux.

[18] KANT, Emmanuel, *Critique de la raison pure*, 1781 ; tr. fr. en édition de poche, Garnier-Flammarion, 1976.

[19] Voir COUTURAT, Louis, La philosophie des mathématiques de Kant, *Revue de Métaphysique et de Morale*, mai 1904 ; = *Les principes des mathématiques*, Appendice, 1905, rééd. 1980, Albert Blanchard.

[20] CARNAP, Rudolph, *Der Logische Aufbau der Welt*, Berlin, 1928 ; tr. angl. *The logical structure of the world*, University of California Press, 1967, XXVI+364 p.

Frege définit en 1879 la logique du premier ordre[21] à peu près telle que nous la connaissons de nos jours. Pour cela il commence par insister sur les notions de *relation* sur un ensemble donné, de *variable* et de *constante*, en créant un formalisme adéquat. Il introduit ensuite les notions de *quantificateurs* universel et existentiel, ainsi que de *variable libre* et de *variable liée*. Il définit alors la notion de *formule*, c'est-à-dire de formules du premier ordre mais également d'ordres supérieurs (il n'oblige pas les quantificateurs à ne porter que sur des éléments de l'ensemble de référence ; ils peuvent également porter sur des formules). Il définit la notion de *démonstration* : un certain nombre de formules, ou plus exactement d'*énoncés*, sont considérés comme vrais (ce sont les *axiomes*) ; à partir de celles-ci ou d'autres formules vraies on peut en déduire d'autres à l'aide de *règles d'inférence*.

Frege donne alors un système d'axiomes et de règles d'inférence pour la logique (la pensée pure) dont Kurt Gödel montrera en 1930 qu'il est *complet*, c'est-à-dire qu'il permet de déduire tous les énoncés logiques qui sont vrais. On obtient ainsi une présentation **formalisée** de la logique.

La question qui se pose alors se précise : peut-on développer l'arithmétique dans le cadre de cette logique ou faut-il ajouter de nouveaux axiomes ?

Voila terminé ce que l'on peut rétrospectivement appeler la première étape de l'œuvre de Frege : la notion de présentation formalisée. Il lui aura fallu très peu de temps pour cela. Durant les quarante-cinq ans qui lui restaient alors à vivre, il essaiera tout à la fois de faire adopter cette notion de présentation des mathématiques comme la seule possible, et surtout de répondre positivement à la question ci-dessus.

### 2.4.2 Le logicisme

On appelle **logicisme** la philosophie selon laquelle les mathématiques peuvent se réduire à la logique. On vient de voir l'émergence de cette conception avec Frege. Que celle-ci soit véridique n'est pas clairement établi, même de nos jours, et pour des raisons que nous allons indiquer.

Continuons avec la deuxième partie de l'œuvre de Frege. Pour fonder l'arithmétique on a besoin de manipulations élémentaires sur les ensembles, et donc, de la théorie élémentaire des ensembles. De nos jours on présente ordinai-

[21] Une formule de la **logique du premier ordre** est formée à partir de relations de base (sur un ensemble de référence donné), de variables, de constantes (sur ce même ensemble), de fonctions à plusieurs variables (de ce même ensemble dans ce même ensemble), des connecteurs logiques (le non, le et, le ou, le implique, le est équivalent à) et des quantificateurs il existe un et quel que soit (l'élément de ce même ensemble).

rement la logique, puis la théorie élémentaire des ensembles, comme deux chapitres distincts du cours de mathématiques. Cependant la théorie (élémentaire) des ensembles était considérée à l'époque de Frege comme faisant partie de la logique ; on ne s'interroge plus réellement aujourd'hui sur son statut.

Frege commença par développer quelque peu la théorie élémentaire des ensembles. Il donna ensuite, avant Cantor, une définition claire du nombre cardinal : ce fut le premier essai de définition rigoureuse qui en ait été donné : des ensembles **A** et **B** sont dits **équipotents** si, et seulement si, il existe une bijection de **A** sur **B** ; l'équipotence est une relation d'équivalence ; le **cardinal** d'un ensemble **E** est la classe d'équivalence de cet ensemble pour cette relation d'équivalence (Frege, 1884, §68). Il remarqua d'ailleurs que cette façon de faire, de considérer une relation d'équivalence, n'était pas nouvelle et qu'elle pouvait être utilisée pour définir la direction d'un droite, l'orientation d'un plan ou la forme d'un triangle (Frege, 1884, §65). Pour définir les entiers naturels il restait encore à définir ce qu'est un ensemble fini, ce qui est moins clair chez Frege.

Ceci n'a d'ailleurs rétrospectivement pas d'importance, puisque le système de Frege allait être ruiné par la découverte du paradoxe de Russell[22] (1902), indiquant qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles, qu'ainsi l'équipotence n'est pas une relation au sens strict, et donc qu'on ne peut pas parler de classe d'équivalence.

### 2.4.3 Les développements

L'œuvre de Frege restera longtemps ignorée. Elle ne deviendra indispensable pour le fondement des mathématiques que lorsque Bertrand Russell (1872-1970) en donnera un exposé amélioré et plus pédagogique en 1903[23]. Bertrand Russell s'associera avec Alfred North Whitehead (1861-1947) pour publier entre 1910 et 1913 un traité mathématique formalisé[24].

David Hilbert commença à la fin des années 1910 une réflexion sur la formalisation sous le nom de **métamathématique**[25]. Son but était de prouver que les

22 RUSSELL, Bertrand, *Letter to Frege*, 1902, première publication in VAN HEIJENOORT, *From Frege to Gödel*, 1967, p.124-125 ; tr. fr. p..240-243 in *Logique et fondements des mathématiques: Anthologie (1850-1914)*, François Rivenc & Philippe de Rouilhan ed., Payot, 1992, 447 pp.

23 RUSSELL, Bertrand, *The principles of mathematics*, Cambridge University Press, 1903 ; 2nd ed. Allen & Unwin, 1937, XXXIX+534 p. ; tr. fr de la première partie et des appendices *Les principes des mathématiques*, dans *Écrits de logique philosophique*, P.U.F., 1989, LV+458 p., p.1-200.

24 WHITEHEAD, Alfred North & RUSSELL, Bertrand, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, vol.1 1914, 2nde éd. 1925, vol.2 1912, vol.3, 1913 ; Paperback edition to *56, 1962, XLVI+410p. ; traduction française de l'introduction dans *Écrits de logique philosophique*, P.U.F., 1989, LV+458 p., p.221-334.

25 Il s'agit de nombreuses conférences reprises en appendice au fur et à mesure dans les diverses éditions de ses *Fondements de la géométrie*.

mathématiques ne sont pas contradictoires, apportant ainsi une preuve absolue de consistance (rappelons qu'on n'obtenait que des preuves de consistance relative pour les géométries non euclidiennes). Les résultats de Gödel de 1931 montreront pourquoi il ne pouvait pas réussir.

### 2.4.4 Skolem et la mise au point

Nous avons vu comment est née la méthode formelle, proche de notre actuelle logique du premier ordre mais avec un mélange avec des logiques d'ordres supérieurs. La définition précise de la notion de formule du *calcul des prédicats*, ou *logique du premier ordre*, semble due, pour la première fois et sous forme encore imparfaite, à Hilbert et Ackermann en 1928[26] (III §5) :

> « Afin de préparer un traitement systématique du calcul des prédicats, nous donnons d'abord une revue exacte des notations employées.
>
> Parmi les symboles qui apparaissent dans le calcul des prédicats il y a premièrement toutes les *variables* de différentes sortes. Les variables sont toujours des lettres en italique, majuscules ou minuscules. Nous distinguerons :
>
> 1. Les *variables d'énoncés* : X, Y, Z, …
> 2. Les *variables d'individus* : *x*, *y*, *z*, …
> 3. Les *variables de prédicats* : F(.), G(.,.), H(., .,.), …
>
> Ici les variables de prédicats des nombres différents de places d'arguments comptent comme des variables différentes, même lorsque les lettres majuscules en italique sont les mêmes.
>
> Nous désirons maintenant expliquer ce qui doit être entendu par *formule* du calcul des prédicats.
>
> Avant tout disons provisoirement que nous entendons par formule une expression qui a un sens construite à partir des variables ci-dessus au moyen des connecteurs propositionnels &, $\vee$, $\bar{}$, $\rightarrow$ et $\sim$, et des quantificateurs universel et existentiel. Cependant le point de vue axiomatique de la section suivante, selon lequel les preuves dérivent de règles purement formelles sans appel à la signification des symboles logiques, rend nécessaire la caractérisation des expressions désignées comme formules par une description de leur structure formelle seule, et d'éviter des concepts tels que « signifiant ».
>
> Pour commencer, disons que les variables d'individus (*i.e.* les lettres minuscules en italique) peuvent apparaître dans les formules ainsi que les quantificateurs universel et existentiel correspondants. S'il apparaît dans

[26] HILBERT, David & ACKERMANN, Wilhelm, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, 1928, 2nde éd. 1938 ; tr. angl. de la 2nde éd. *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea, 1950, XII+172 p.

une formule, simultanément avec une variable individuelle, disons *x*, un quantificateur universel ou existentiel correspondant - dans ce cas (*x*) ou (E*x*) - alors la variable en question est dite *liée* dans la formule, et sinon *libre*.

Par le terme *formule* nous entendons dorénavant les combinaisons de symboles, et seulement ceux-ci, de notre calcul qui peuvent être tels par un nombre fini d'applications des règles suivantes :

1. Une variable propositionnelle est une formule ;
2. Les variables de prédicats dont les places d'arguments sont remplies par des variables d'individus sont des formules ;
3. Si une combinaison de symboles A est une formule alors $\overline{A}$ est aussi une formule ;
4. Si A et B sont des formules telles que la même variable individuelle n'apparaît pas liée dans l'une et libre dans l'autre, alors :
$A \,\&\, B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \sim B$
sont aussi des formules ;
5. Si A(*x*) est une formule dans laquelle la variable *x* apparaît comme variable libre alors (*x*) A(*x*) et (E*x*) A(*x*) sont aussi des formules. L'énoncé correspondant est également vrai pour les autres variables libres.

Nous insisterons sur le fait que, suivant cette définition, la même variable ne peut pas apparaître dans une formule à la fois comme libre et liée. »

Remarquons l'intervention du mot « fini » dans la définition.

Thoralf Skolem[27], à l'occasion de problèmes divers, dans une série d'articles des années 1930, donne les définitions actuelles de la logique du premier ordre et de théorie du premier ordre. Il est difficile de se référer à un article particulier puisqu'il ne publiera jamais d'article de synthèse à ce sujet, ce qui fait qu'on oublie souvent son intervention.

Martin Davis[28] a proposé d'appeler **thèse de Hilbert** le point de vue selon lequel la notion informelle de *démontrable* est rendue précise par la notion de *démontrable en logique du premier ordre*. Un fondement des mathématiques ne peut donc s'exprimer qu'à travers une théorie du premier ordre.

27 SKOLEM, Thoralf, *Selected works in logic*, Universitesforlaget, Oslo, 1970.

28 Voir BARWISE, Jon ed., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977, XI+1165 p., p.41.

## Réductions successives des mathématiques

### Introduction

Nous ne pouvons pas développer dans le cadre limité d'un article l'émergence de toutes les disciplines et chapitres mathématiques. La lecture d'un manuel d'histoire des mathématiques en donnera une idée. Maintenant que nous avons dégagé la (bonne) méthode de présentation des mathématiques, nous pouvons dire qu'une discipline est **mathématique** si, et seulement si, elle est susceptible d'être présentée de la manière indiquée ci-dessus, c'est-à-dire comme une théorie formelle du premier ordre.

Remarquons que quelques-unes des disciplines présentables comme théorie formelle, celles dont les axiomes sont des lois qui exigent le recours à l'expérience pour les découvrir, et non pas seulement à l'observation (la différence entre *observation* et *expérience* étant subjective), sont soit dès l'origine, soit au cours de leur développement cataloguées comme disciplines d'un autre domaine que les mathématiques. C'est le cas par exemple de la mécanique, considérée comme relevant de la physique. La découverte des géométries non-euclidiennes, et la difficulté de déterminer laquelle modélise « le mieux » notre univers, a même, pendant un temps, rejeté la géométrie parmi les sciences physiques.

Les disciplines que certains considèrent usuellement comme "mathématiques" sont nombreuses, et n'ont pas nécessairement de liens entre elles quant à leur sujet (le seul lien étant la méthode de présentation). Ne pourrait-on pas passer des mathématiques (au pluriel, puisqu'elles comprennent plusieurs disciplines autonomes) à la **mathématique** (au singulier) ?

La question se posait d'autant plus pertinemment après le succès de la *réduction* de certaines disciplines à d'autres, telle la géométrie ramenée à l'algèbre par Descartes. Une autre motivation pour cela est l'analogie avec la réduction des forces physiques et la théorie de la « grande unification ».

Alors que la « grande unification » est encore un rêve en physique en cette fin du XX^e siècle, l'unification des mathématiques a été réalisée peu à peu pour aboutir, à la fin du XIX^e siècle, à un certain achèvement.

### Réductions successives des disciplines mathématiques

Nous ne pouvons ici faire l'historique de ces réductions successives. Cela n'est pas grave, car les divers stades en sont bien connus en général. Nous nous contenterons de rappeler les grandes étapes, en renvoyant, là encore, à un manuel d'histoire des mathématiques ceux des lecteurs qui voudraient avoir plus de détails (ou les références primaires). Les disciplines mathématiques de base sont sûrement l'arithmétique élémentaire et la géométrie élémentaire. La première réduction eut lieu lorsque René Descartes introduisit la géométrie analytique, premier pas vers la réduction totale de la géométrie à l'étude des ensembles produits $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de certaines structures.

Remarquons que ceci ne veut absolument pas dire, comme cela se fit dans les années 1960, que la géométrie se réduit à l'étude de ces structures particulières (pas plus que la théorie des probabilités n'est qu'un cas particulier de la théorie de la mesure, celui où l'ensemble de base est de mesure un). Nous n'insisteront jamais assez sur le point suivant : une discipline se présente comme un formalisme certes, mais elle se constitue aussi toute entière autour d'une "intuition" : le formalisme sert à exposer clairement les résultats, mais l'intuition seule permet la créativité dans cette discipline.

D'ailleurs, un bon exposé de géométrie élémentaire devrait commencer par l'observation et l'expérimentation pour dégager les concepts fondamentaux et les lois fondamentales. Il devrait être suivi, dans une seconde étape, par un exposé axiomatique, qui dégagerait bien les non-dits du premier exposé, en s'appuyant sur les travaux d'Euclide, de David Hilbert, et de ses successeurs jusqu'à Henry Forder[29]. Un troisième exposé peut alors suivre, suivant une idée de Hermann Weyl[30] popularisée par les bourbakistes, qui présente la géométrie comme un espace affine euclidien de dimension deux ou trois, et montrant qu'il n'y en a qu'un, à isomorphisme près. Ce dernier exposé, élégant et facile à retenir, peut alors servir pour aller plus loin en géométrie (aborder la géométrie différentielle, par exemple) mais ne doit en aucun être le premier à être enseigné.

La seconde réduction fondamentale eut lieu à la fin du XVIII^e^ siècle et au début du XIX^e^ siècle, lorsqu'on ramena tous les concepts de l'Analyse à la notion fondamentale de limite, elle-même se définissant grâce aux inégalités de Cauchy. On faisait ainsi reposer l'Analyse sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

La troisième réduction consista à bien définir l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, soit à partir de la géométrie soit à partir de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. On connaît les rôles de Gauss, d'Argand, de Wessel pour la représentation géométrique des nombres complexes et celle d'Hamilton pour représenter un nombre complexe par un couple de nombre réels.

La quatrième réduction consista à définir la structure des nombres réels à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Ceci fut fait la même année 1872, par plusieurs mathématiciens : George Cantor, Charles Méray et Richard Dedekind. À la fin du XIX^e^ siècle, l'ensemble $\mathbb{Q}$ fut lui-même défini à partir de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, et ce dernier, à partir de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

On avait alors réussi à **arithmétiser les mathématiques**, c'est-à-dire à les faire reposer sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et … aussi, en fait, sur la théo-

29 FORDER, Henry George, *The Foundations of Euclidean Geometry*, Cambridge University Press, 1927, reprint Dover, 1958, XII+349 p.

30 WEYL, Hermann, 1918 ; tr. fr. de la 4ème éd. allemande *Temps, espace, matière*, 1922, rééd. Albert Blanchard, 1958, VI+290 p. ; tr. anglaise *Space-Time-Matter*, 1922, rééd. Dover.

rie élémentaire des ensembles, comme on n'en prit conscience qu'un peu plus tard (si bien que son rôle, pourtant fondamental, n'est pas rappelé dans cette grande étape de réduction connue sous le seul nom d'*arithmétisation*). La théorie élémentaire des ensembles apparaissait alors seulement comme une petite théorie annexe, que l'on pouvait même, en fait, placer en logique.

Richard Dedekind (1831-1916) donna les axiomes fondamentaux de l'arithmétique en 1888[31], popularisés l'année suivante[32] par Giuseppe Peano (1858-1932). Notons que Dedekind dégagea au passage la théorie élémentaire des ensembles telle qu'elle est enseignée de nos jours encore en premier cycle universitaire.

Ernst Zermelo (1871-1956) prit conscience en 1904[33] d'une méthode utilisée en mathématiques "avancées" (comme on dit), et qui n'était peut-être pas tout à fait fondée, à savoir l'utilisation de ce qu'on a appelé l'**axiome du choix**. Il établit alors ce que nous considérons de nos jours comme la démonstration de l'une des nombreuses équivalences entre l'axiome du choix et d'autres propositions (en l'occurrence, le fait que tout ensemble peut être bien ordonné). L'explicitation du statut de cet axiome le conduisit à proposer une **axiomatique de la théorie des ensembles** en 1908[34], dans la tradition d'Euclide, et non sous forme formalisée telle que l'entendait Frege. La théorie des ensembles ainsi entendue dépassait la théorie élémentaire des ensembles, telle que dégagée par Dedekind, puisque Zermelo y faisait intervenir par exemple la notion de réunion d'un ensemble d'ensembles (éventuellement infini). Par contre cette théorie ne faisait appel à aucune théorie préalable (sauf la logique).

31 DEDEKIND, Richard, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1888, Braunschweig (6th ed. 1930) ; = *Dedekind Gesammelte mathematische Werke*, vol.III, Braunschweig, 1932, pp.335-391 ; Engl. tr. by W.W. Beman, The Nature and Meaning of Numbers in *Essays on the theory of numbers*, Chicago, Open Court, 1901, reed. Dover, 1963, 115 p. ; traduction française de Judith Milner et Hourya Sinaceur, *Les nombres, que sont-ils et à quoi servent-ils?*, La bibliothèque d'Ornicar? [Seuil], s.d. [1979], 142 p.

32 PEANO, Giuseppe, *Arithmetices principia*, Bocca, Turin, 1889 ; = *Opere Scelte*, Edizione cremonese, Rome, vol.2, 1958, pp.20-55 ; tr. angl. partielle in VAN HEIJENOORT, Jean, ed., *From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967 (4th printing, 1981, corrected), p.83-97 ; tr. angl. *The principles of arithmetic, presented by a new method*, in Hubert C. Kennedy, *Selected works of Giuseppe Peano*, University of Toronto Press, 1973, XI+249 p., pp.101-134.

33 ZERMELO, Ernst, Beweis, dass jede Menge wohlgeordner werden kann, *Mathematische Annalen*, vol. 59, 1904, pp.514-516 ; tr. angl. in VAN HEIJENOORT, Jean, ed., *From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967 (4th printing, 1981, corrected), p.139-141.

34 ZERMELO, Ernst, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *I*, *Mathematische Annalen*, vol.65, 1908, pp.261-281 ; tr. fr. *Recherches sur les fondements de la théorie des ensembles*, p..367-378 in *Logique et fondements des mathématiques: Anthologie (1850-1914)*, François Rivenc & Philippe de Rouilhan ed., Payot, 1992, 447 pp. ; tr. angl. in VAN HEIJENOORT, Jean, ed., *From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967 (4th printing, 1981, corrected), p.199-215.

En ce qui nous intéresse ici, l'important est qu'il mit la dernière main à la réduction successive des mathématiques, c'est-à-dire qu'il définit l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels à partir des notions ensemblistes, faisant ainsi de la théorie des ensembles la théorie mathématique par excellence.

## LA THÉORIE DES ENSEMBLES DE ZERMELO-FRAENKEL

Après réduction des mathématiques à des disciplines de plus en plus élémentaires, on s'aperçut, comme nous l'avons vu, qu'en exceptant évidemment la logique, la discipline la plus fondamentale est la *théorie des ensembles* (*élémentaire*). Les recherches sur la présentation des disciplines exigeaient donc une *théorie formelle des ensembles*, c'est-à-dire une théorie logique du premier ordre qui formalisât les notions intuitives sur les ensembles.

### 4.1 Le choix du langage

Pour une théorie du premier ordre, le premier choix à effectuer est celui du langage, c'est-à-dire des constantes, des fonctions, et des relations à considérer comme termes primitifs.

#### Une première idée

Il est pratiquement évident que nous ne pouvons pas définir ce qu'est un *ensemble* (quelle que soit l'approche choisie ; en particulier ce n'est pas possible à partir des notions de la logique des prédicats)[essayez de le faire et vous en viendrez certainement à cette conclusion ! Remarquons cependant que l'on ne peut pas davantage prouver que l'on ne sait pas définir ce qu'est un ensemble], ni *être élément d'un ensemble.* On doit donc avoir *a priori* recours à deux termes primitifs au moins : celui d'*ensemble* et celui d'*élément d'un ensemble.* Comme dans la théorie élémentaire, nous noterons $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ pour dire que $\mathbf{a}$ est un élément de $\mathbf{A}$, et ce prédicat d'appartenance[35] doit être un troisième terme primitif.

En fait nous allons nous servir d'une première « astuce » pour simplifier notre système : il n'y aura pas besoin de parler d'*élément.*

En effet, on sait que l'on peut avoir $\mathbf{X} \in \mathbf{Y}$ pour des ensembles $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, comme par exemple dans le cas de $\mathbf{X} \in \wp(\mathbf{A})$. Donc, pour des objets quelconques

35 Peano introduit le signe epsilon ε à la manière des Européens du continent pour marquer l'appartenance : « J'ai introduit le signe ε, qui ne devra pas être confondu avec le signe ⊃. » (PEANO, 1889, cité ci-dessus, préface) ; « Le signe ε est la lettre initiale de εστι. » (PEANO, note 2 de Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Math. Ann.*, vol.37, 1890, p.182-288 ; = *Opere Scelte*, vol.1, 1957, p.119-170). Russell le remplace par l'epsilon britannique plus droit qui, introduit sur le continent, fut en général distingué de l'epsilon ordinaire et devint le signe d'appartenance : « Dans cette méthode nous prendrons encore comme fondamentale la relation (que je dénoterai par ∈ avec Peano) d'un individu à une classe à laquelle il appartient. » (RUSSELL, 1903, cité plus haut, 20, p.18-19).

**x** et **y**, on peut dire que **x** est un élément de **y** si et seulement si on a la relation **x** ∈ **y**. Dans la théorie intuitive, il existe des éléments qui ne sont pas des ensembles (prendre un ensemble d'objets concrets). Cependant, en mathématiques, on s'aperçoit que presque tout est ensemble, mis à part quelques éléments de base. On peut cependant considérer, comme nous le verrons, que, grâce à des « astuces » diverses, même ces éléments de base peuvent être regardés comme des ensembles. Ainsi fera-t-on la convention suivante :

**Tous les objets de notre théorie sont des ensembles.**

De ce fait, nous n'avons plus besoin de considérer *ensemble* comme un terme primitif. On appellera ainsi **ensembles** les objets de notre théorie (autrement dit les variables seront des variables d'*ensembles*), et les éléments d'un ensemble sont reconnus de la façon indiquée ci-dessus. On parle quelquefois de la théorie des **ensembles abstraits** pour les distinguer des **ensembles concrets**, comme les ensembles de pommes ou de poires.

**Problème**

Quelle sont les implications de cette convention ?

En mathématiques, elle sera sans inconvénients, comme nous le verrons. Et nous pourrons par ailleurs modéliser les situations concrètes, comme on s'en aperçoit par expérience.

**Deuxième idée**

Nous devons donc disposer des variables d'individus représentant les ensembles, du signe ∈ (propre à la théorie des ensembles) et des signes logiques, à savoir le signe d'égalité =, les connecteurs logiques (on gardera par exemple les cinq connecteurs naturels, mais nous savons que deux suffisent), les quantificateurs existentiel et universel (remarque analogue). Nous n'aurons pas besoin de constantes au début (l'ensemble vide, par exemple, pourra se définir). Nous n'aurons pas davantage besoin de considérer des prédicats autres que ceux d'égalité et d'appartenance, car, dans la théorie des ensembles, tous les prédicats utiles se forment à partir de ceux-là. Le langage de la théorie des ensembles sera donc très simple, beaucoup plus simple même que celui de la logique pure des prédicats.

**Le langage de la théorie des ensembles comme langage des mathématiques**

On peut alors développer toutes les mathématiques classiques (*i. e.* connues) dans ce langage de la théorie des ensembles (et ainsi, en quelque sorte, avec les seuls axiomes de la théorie des ensembles que nous allons voir ci-après). Ceci ne pouvait peut être pas tout à fait être prévu *a priori*. Une conséquence de cette faculté est que ce langage peut s'appeler le **langage des mathématiques**, puisque les mathématiques sont ainsi unifiées. Bien entendu, le développement des mathématiques nous conduira à utiliser de nombreuses abréviations par rapport aux symboles primitifs.

Ainsi tout texte mathématique peut-il s'écrire théoriquement à l'aide des seuls signes suivants :

$$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \mathbf{x}, ', \exists, \forall, =, \in, (, ).$$

On peut même envisager d'utiliser moins de signes si l'on veut car, comme nous le savons, $\neg$ et $\vee$ suffisent comme connecteurs, $\exists$ comme quantificateur et les parenthèses sont inutiles avec la notation *polonaise*. On note **L(ZF)** le langage de la logique du premier ordre possédant ces symboles propres.

## 4.2 Le choix des axiomes

Puisque la théorie des ensembles devra être une théorie de la logique des prédicats (égalitaire), il est bien clair que toutes les règles et les théorèmes de la logique seront valables dans ce cadre. Mais il faudra y ajouter des *axiomes propres*.

### 4.2.1 La théorie trop élémentaire de Peano (1889)

Une première façon de faire est de reprendre la théorie (très) élémentaire des ensembles telle qu'elle a été développée au tout début des mathématiques et de formaliser les propriétés considérées à ce moment. On insistera alors surtout sur l'inclusion et les opérations sur les ensembles (plutôt que sur l'appartenance proprement dite). On obtient ainsi essentiellement l'*algèbre de Boole* des ensembles. Il faudra cependant ensuite ajouter des propriétés au fur et à mesure du développement des mathématiques (introduction des notions de couple, de relation, d'applications...). C'est ce que fit Peano dans ses écrits de la fin du XIX$^{e}$ siècle, sans s'être toutefois explicitement placé dans le cadre de la logique des prédicats.

### 4.2.2 L'essai de Frege (1893)

Frege donne dans son ouvrage de 1893 le premier essai vraiment sérieux de formalisation de la théorie des ensembles. Un premier axiome porte sur la condition pour que des ensembles $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ soient égaux (*i. e.* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$). Intuitivement, des ensembles $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes éléments, ce que traduit l'axiome suivant :

**A1.- (Axiome d'extensionnalité)**

$$\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y} \, [\, \mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \forall \mathbf{z} \, [\, \mathbf{z} \in \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y} \,]].$$

**Commentaires**

1°) Cet axiome ne pose aucun problème d'intelligibilité. Il est même si évident que les néophytes considèrent souvent comme absurde le besoin de le poser. Cependant, il faut bien relier $=$ et $\in$ ; il est donc techniquement indispensable.

2°) Remarquons qu'il suffirait de poser :

$\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y} \; [\; \forall \mathbf{z} \; [\; \mathbf{z} \in \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y} \;] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y} \;]$,

car l'implication dans l'autre sens est une forme du schéma d'axiomes d'égalité, qui fait partie de la logique.

3°) Cet axiome pourrait évidemment être considéré comme définition du symbole $=$, qui serait alors un symbole dérivé. Mais le signe $=$ est traditionnellement considéré comme un signe logique primitif *précédant* $\in$.

4°) Seul le nom de cet axiome peut sembler bizarre. Il provient du vocabulaire des logiciens qui s'occupaient de la *logique des classes* : une classe pouvait être déterminée en *compréhension* (par une propriété caractéristique) ou en *extension* (en nommant tous ses éléments) ; dans ce dernier cas, pour examiner si deux classes étaient égales, on regardait si elles avaient les mêmes éléments. *Extensionnalité* est un mot de la famille d'*extension*.

**Introduction au deuxième axiome**

Nous venons de rappeler que, dans la théorie intuitive, un ensemble peut être défini soit en extension, soit par compréhension. Le deuxième axiome naturel consiste donc à dire qu'à toute compréhension correspond une extension, c'est-à-dire que pour toute *propriété* $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ il existe un ensemble $\mathbf{y}$ formé des ensembles $\mathbf{x}$ vérifiant $\mathbf{P}(\mathbf{x})$.

Il n'est cependant pas immédiat d'exprimer cet axiome (donné ici sous sa forme intuitive, non formalisée)[le lecteur de bonne volonté pourra s'y essayer]. Une « astuce » consiste à remarquer qu'un premier type de propriétés est donné par les formules du langage possédant une variable libre. Il y en a peut-être d'autres types, mais nous disposons déjà de celles-là, et nous nous en tiendrons à elles pour commencer, car on s'aperçoit alors que, pour retrouver la théorie classique, elles suffisent. Une difficulté surgit alors du fait qu'on ne peut pas, dans un axiome formel, énoncer « pour toute formule on a … ». Pour contourner la difficulté, on ne donnera pas un axiome, mais un **schéma d'axiomes**, plus précisément un axiome par propriété du type ci-dessus. On peut donc maintenant l'énoncer :

**A2.- (Schéma d'axiomes de compréhension)**

*Pour toute formule* $\phi(\mathbf{x})$ *et* $\mathbf{y}$ *variable non libre dans* $\phi$, *on a l'axiome* :

$\exists \mathbf{y}, \forall \mathbf{x} \; [\; \mathbf{x} \in \mathbf{y} \Leftrightarrow \phi(\mathbf{x}) \;]$.

**Autres axiomes ?**

Les axiomes ci-dessus ont été énoncés par Frege en 1893. A-t-on besoin d'autres axiomes ? *A priori* il semblerait que ce soit le cas, mais en fait, en développant la théorie ainsi obtenue, on s'aperçoit que l'on peut retrouver toutes les mathématiques classiques sans avoir à utiliser d'autres axiomes, et que, de plus, cela se fait même de façon naturelle. Cette théorie pourrait donc être l'axiomatique de la théorie des ensembles et des mathématiques, mais …

### 4.2.3 Le paradoxe de Russell

Bertrand Russell a démontré en 1902 qu'une telle théorie est contradictoire, car on a le théorème logique suivant.

**Théorème**.- (**Antinomie de Russell**)

$\neg \exists \mathbf{y}, \forall \mathbf{x}\ [\ \mathbf{x} \in \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \notin \mathbf{x}\ ].$

◊ En effet si on a : $\exists \mathbf{y}, \forall \mathbf{x}\ [\ \mathbf{x} \in \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \notin \mathbf{x}\ ]$, alors soit **X** un tel **y**. On peut se demander si $\mathbf{X} \in \mathbf{X}$ ou $\mathbf{X} \notin \mathbf{X}$. Dans le premier cas, par définition de **X**, on a $\mathbf{X} \notin \mathbf{X}$, ce qui est contradictoire. Dans le second cas, on a $\mathbf{X} \in \mathbf{X}$, ce qui est aussi contradictoire. Donc il n'existe pas de tel **y**. ◊

**Conséquence**

Il y a contradiction entre l'antinomie de Russell et l'axiome de compréhension pour la formule $\phi(\mathbf{x})$ égale à $\mathbf{x} \notin \mathbf{x}$.

Bertrand Russell communique la découverte de son antinomie à Gottlob Frege dans une lettre de 1902. Ce dernier lui répond immédiatement[36] :

> « Votre découverte de la contradiction m'a surpris au plus haut point et je dirai presque, consterné, car elle fait que la base sur laquelle je pensais que l'arithmétique s'édifie se trouve ébranlée. Il semble, après cela, que [...] ma loi V [l'axiome de compréhension] soit fausse [...] Il faut que je continue encore à réfléchir à la question. »

### 4.2.4 Résolution de la crise

La première axiomatique ainsi considérée, qui semblait très naturelle, était contradictoire et ne pouvait donc pas convenir. Ceci provoqua une très grave crise au sein des mathématiques, dite **crise du fondement des mathématiques**. Plusieurs essais de solutions furent tentés, dont on peut retenir trois courants principaux que voici :

**L'intuitionnisme**

On utilise très fortement le *principe du tiers exclu* pour démontrer l'antinomie de Russell (car on dit que l'on ne peut avoir que soit $\mathbf{X} \in \mathbf{X}$, soit $\mathbf{X} \notin \mathbf{X}$). Les **intuitionnistes**, dont le chef de file fut Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), disent que ce principe n'est aucunement intuitif pour les *grands* ensembles ; ils ont

[36] Voir la traduction anglaise de ces lettres dans VAN HEIJENOORT, Jean, ed., *From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967 (4th printing, 1981, corrected), p.124-128 et la traduction française p. 237-243 in *Logique et fondements des mathématiques : Anthologie (1850-1914)*, François Rivenc & Philippe de Rouilhan ed., Payot, 1992, 447 pp.

commencé une étude critique de toute la logique (et des mathématiques), en ne gardant que ce qui était réellement évident à leurs yeux[37]. Ils dégagèrent ainsi une **mathématique intuitionniste**. Cependant, celle-ci s'éloigne beaucoup trop des mathématiques *classiques* pour servir de fondement universel des mathématiques. Elle a toutefois des applications, même dans le cadre des mathématiques classiques, en particulier, de nos jours, en informatique.

**La théorie des types**

On peut considérer qu'il y a des ensembles primitifs, comme l'ensemble vide **∅**, puis des ensembles du deuxième ordre ayant pour éléments des ensembles du premier ordre, comme **{∅}**, des ensembles du troisième ordre ayant pour éléments des ensembles du premier et du deuxième ordre, comme **{∅,{∅}}** ou **{{∅}}**, etc. L'axiome de compréhension ne devrait donc pas porter sur tous les ensembles, mais seulement sur les ensembles d'un ordre donné (et l'ensemble résultant serait d'un ordre plus grand). Ceci est à la base de la **théorie des types** de Russell (1906)[38], qui permit de résoudre les antinomies. Elle fut adoptée dans les célèbres *Principia Mathematica* qu'il signa avec Whitehead, parus à partir de 1910. Le recours aux entiers naturels n'est qu'apparent et se contourne facilement, mais le développement a posé des problèmes non prévisibles (plus techniquement, il soulève le besoin d'un **axiome de réduction** peu naturel). Ce fondement des mathématiques est donc abandonné de nos jours, mais la théorie des types connaît par contre une belle envolée en informatique.

**La théorie de la limitation de taille**

Cette doctrine dit que l'on ne devrait utiliser l'axiome de compréhension que pour obtenir de nouveaux ensembles qui ne sont pas *trop grands* comparés aux ensembles dont l'existence est déjà supposée dans la construction. Elle fut également formulée par Russell dans le même article de 1906. C'est celle qui est la plus utilisée de nos jours pour élaborer le fondement des mathématiques. On remplace le schéma d'axiomes de compréhension par une série de schémas d'axiomes indiquant quels sont les procédés de construction permis. C'est par exemple ce que fit Zermelo en 1908 dans l'article cité ci-dessus.

37 Voir, par exemple, MANCOSU, Paolo, *From Brouwer to Hilbert: The debate on the foundations of Mathematics in the 1920's*, Oxford University Press, 1998, X+337 p. qui contient la traduction anglaise des textes fondamentaux.

38 RUSSELL, Bertrand, Mathematical Logic as based on the Theory of Types, *American Journal of mathematics*, vol.30, 1908, pp.222-262 ; = *Logic and Knowledge*, 1956, pp.57-102 ; tr fr. *La logique mathématique fondée sur la théorie des types* des §§ I, III, IV et V dans *Logique et fondements des mathématiques*, Payot, 1992, p.309-334.

### 4.2.5 Notion de classe

Mais que faire, dans la théorie de la limitation de taille, des *ensembles* au sens intuitif qui ne sont pas des ensembles au sens de la théorie formelle (tel l'ensemble de tous les ensembles) ? On a quelquefois besoin de les considérer, même si l'on ne peut pas toujours, à partir d'eux, faire de construction.

Ces « ensembles » apparaissent alors sous le nom de **classe**, ce terme n'étant plus un synonyme d'*ensemble*, mais un terme technique bien précis au sein de la théorie. Selon l'attention que l'on porte aux classes, on peut ainsi considérer deux grands courants de théories :

— dans un premier courant, on ne considère que les ensembles, les classes n'apparaissant que comme des formules [ce seront les extensions de ces formules, *i. e.* la classe des éléments (ensembles) ayant cette propriété]. C'est la solution généralement retenue pour les présentations usuelles. La plus célèbre de ces théories est la **théorie de Zermelo-Fraenkel**.

— dans un deuxième courant, on considère deux sortes d'objets, les classes et les ensembles (qui sont des classes spéciales). La plus célèbre de ces théories est la **théorie de Gödel-Bernays**.

### 4.2.6 La théorie axiomatique de Zermelo

Le choix des axiomes fut dicté, pour Zermelo, par le problème de l'axiome du choix. Sa théorie se situe dans un cadre axiomatique (*à la* Euclide) et non formel (*à la* Frege). L'idée fondamentale est la suivante : on restreint le schéma d'axiomes de compréhension en postulant l'existence de certains ensembles de base (comme l'ensemble vide) et certains procédés de construction de nouveaux ensembles à partir d'ensembles connus (d'abord les ensembles de base, puis ceux construits à partir de ceux-ci, et ainsi de suite), tel l'axiome de l'ensemble des parties d'un ensemble. Ainsi, à toute propriété ne correspond-il plus nécessairement un ensemble, mais seulement à certaines.

#### Conséquences

1°) Tous les paradoxes connus sont éliminés. Mais, en fait, rien ne dit qu'il n'en existe pas d'autres, même si on pense généralement qu'il en est bien ainsi.

2°) Le schéma d'axiomes de compréhension ainsi revu devient plus long à écrire, et en fait se scinde en plusieurs schémas d'axiomes.

#### Problème ouvert numéro un

La théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel est-elle non contradictoire ?

#### Liste des axiomes

Les axiomes sont les suivants, entre lesquels nous avons intercalé quelques abréviations permettant de rendre la théorie plus compréhensible :

**D1**.- *On note* $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}$ *pour* $\forall \mathbf{z}\ [\ \mathbf{z} \in \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y}\ ]$.

**A1**.- (**Axiome d'extensionnalité**)
$\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y}\ [[\ \mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}\ ] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}\ ]$.
**A2**.- (**Axiome de l'ensemble vide**)
$\exists \mathbf{x}, \forall \mathbf{y}\ [\ \mathbf{y} \notin \mathbf{x}\ ]$.
**D2**.- *Cet ensemble* **x** *est unique, en utilisant* A1 ; *on l'appelle l'***ensemble vide** *et on le note* **Ø**.
**A3**.- (**Axiome de l'ensemble à « deux » éléments**)
$\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y}, \exists \mathbf{z}, \forall \mathbf{t}\ [\ \mathbf{t} \in \mathbf{z} \Leftrightarrow [\ \mathbf{t} = \mathbf{x} \vee \mathbf{t} = \mathbf{y}\ ]]$.

**D3**.- *Cet ensemble* **z** *est unique et se note* $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$. *Si* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *c'est le* **singleton x** *noté alors* $\{\mathbf{x}\}$, *sinon c'est la* **paire x**, **y**.

**A4**.- (**Axiome de séparation**) *Si* **A** *est un ensemble et* **P(x)** *une propriété alors il existe un sous-ensemble* **B** *de* **A** *formé des éléments* **x** *de* **A** *vérifiant la propriété* **P(x)**.

**Remarques**

1°) Cet axiome pose des problèmes de formalisation, puisqu'on ne sait pas ce qu'est, avec précision, une « propriété ». Nous verrons comment Skolem résout ce problème.

2°) Cet axiome est souvent cité sous son nom allemand originel d'**Aussonderung axioms** (de *Sonderen*, séparer et *aus*, hors de).

**D4**.- *Cet ensemble* **B** *est unique et se note* $\{\ \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ /\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \}$.

**A5**.- (**Axiome de la réunion**)
$\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y}, \exists \mathbf{z}, \forall \mathbf{t}\ [\ \mathbf{t} \in \mathbf{z} \Leftrightarrow [\ \mathbf{t} \in \mathbf{x} \vee \mathbf{t} \in \mathbf{y}\ ]]$.

**D5**.- *Cet ensemble* **z** *est unique et se note* $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$.

**A6**.- (**Axiome de l'ensemble des parties**)
$\forall \mathbf{x}, \exists \mathbf{y}, \forall \mathbf{z}\ [\ \mathbf{z} \in \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{z} \subseteq \mathbf{x}\ ]$.

**D6**.- *Cet ensemble* **y** *est unique et se note* $\wp(\mathbf{x})$.

**A7**.- (**Axiome de la somme, ou de l'union**)
$\forall \mathbf{x}, \exists \mathbf{y}, \forall \mathbf{z}\ [\ \mathbf{z} \in \mathbf{y} \Leftrightarrow \exists \mathbf{t}\ [\ \mathbf{z} \in \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} \in \mathbf{x}\ ]]$.

**D7**.- *Cet ensemble* **y** *est unique et se note* $\cup\, \mathbf{x}$.

**Remarque**

Cet axiome est une généralisation de A5. Il est utilisé pour les familles d'ensembles.

**D8**.- *On appelle* **successeur** *d'un ensemble* **x** *l'ensemble*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cup \{\mathbf{x}\}.$$

**A8**.- (**Axiome de l'infini**)

$\exists \mathbf{x} \, [\, \varnothing \in \mathbf{x} \wedge \forall \mathbf{y} \, [\, \mathbf{y} \in \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y}' \in \mathbf{x} \,]]$.

**D9**.- *Le plus petit tel axiome, au sens de l'inclusion, se note* $\mathbb{N}$ *et s'appelle l'***ensemble des entiers naturels**.

**Remarque**

En fait Zermelo ne considère pas l'axiome A5, conséquence de A7 (et placé ici dans un but didactique), mais considère l'axiome du choix. De plus, pour lui, le successeur de **x** est {**x**}, et non pas celui que nous avons considéré.

### 4.2.7 La formalisation par Fraenkel et Skolem

Dans les commentaires qu'il fait en 1909 sur l'axiomatisation de Zermelo, Henri Poincaré[39] critique comme imprécise l'explication que donne Zermelo de la notion de *propriété définie* intervenant dans l'axiome de séparation. En 1922, Fraenkel[40] et Skolem[41] proposent chacun une définition plus précise ; elles reviennent l'une à l'autre, et l'on adopte aujourd'hui celle du second : exprimer la théorie dans le langage formel du premier ordre, et comprendre *définie* comme *exprimable par une formule*, idée déjà anticipée par Hermann Weyl dès 1910[42].

39 POINCARÉ, Henri, La logique de l'infini, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 17° année, juillet 1909, p.461-482 ; = *Dernières pensées*, Fammarion, 1913, 2ème éd. 1963, 220 p.

40 FRAENKEL, Abraham, Der Begriff « definit » und die Unabhaängigkeit des Auswahlsaxioms, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physkalisch-mathematische Klasse*, 1922, pp.253-257 ; tr. angl. The notion «definite» and the independence of the axiom of choice pp.284-289 in VAN HEIJENOORT, Jean, ed., *From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967 (4th printing, 1981, corrected).

41 SKOLEM, Thoralf, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Matematkerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse* (Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923), pp. 217-232 ; tr. angl. pp 290-301 in VAN HEIJENOORT, Jean, ed., *From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967 (4th printing, 1981, corrected).

42 WEYL, Hermann, Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe, *Mathematisch-natur-wissenschaftliche Blätter*, vol.7, pp.93-95 et 109-113 ; tr. fr. *Sur les définitions des concepts mathématiques fondamentaux*, pp.19-32 in WEYL, Hermann, *Le continu et autres écrits*, Vrin, 1994, 322 p.

Le quatrième axiome est donc remplacé par :

**SA4.**- (**Schéma d'axiomes de séparation**) *Pour toute formule* $\phi(\mathbf{x})$ *de* **L(ZF)**, *et pour* **y** *et* **z** *des variables distinctes de* **x** *et ne figurant pas dans* $\phi(\mathbf{x})$, *on a* :

$$\forall \mathbf{y}, \exists \mathbf{z}, \forall \mathbf{x} \; [\; \mathbf{x} \in \mathbf{z} \Leftrightarrow [\; \mathbf{x} \in \mathbf{y} \wedge \phi(\mathbf{x}) \;]].$$

On appelle **théorie des ensembles de ZERMELO**, et on note **Z**, la théorie du premier ordre dont les axiomes propres sont les axiomes précédents, avec SA4 (et non A4).

### 4.2.8 Incomplétude pour les ordinaux

Presque aussitôt (en 1922 toujours) Fraenkel[43], Skolem[44] et Lennes[45] reconnaissent la nécessité, pour pouvoir parler de l'ensemble infini $\{\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \wp\wp(\mathbb{N}), \ldots\}$ dans cette théorie, d'élargir le schéma d'axiomes de séparation en un schéma plus puissant, à savoir le schéma suivant.

**SA9.**- (**Schéma d'axiomes de substitution, ou de remplacement**)

*Pour toute formule* $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *et pour* **u**, **v**, **v** ′, **w** *des variables ne figurant pas dans* $\phi$, *on a* :

$$\forall \mathbf{u}, \forall \mathbf{v}, \forall \mathbf{v}' \; [[\; \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}') \;] \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}' \;]$$
$$\Rightarrow \forall \mathbf{x}, \exists \mathbf{y}, \forall \mathbf{w} \; [\; \mathbf{w} \in \mathbf{y} \Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \; [\; \mathbf{u} \in \mathbf{x} \wedge \phi(\mathbf{u},\mathbf{w}) \;]].$$

Un tel axiome dit que si $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une correspondance (pour ne pas dire une application, terme qui a maintenant un sens bien précis) qui, à **x** associe l'unique **y** tel que $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, alors tout ensemble **X** admet une image par cette correspondance, qui est un ensemble. Cela permet de construire des ensembles nouveaux, à savoir les images par une correspondance d'ensembles dont on a montré l'existence.

On appelle **théorie des ensembles de ZERMELO-FRAENKEL**, et on note **ZF**, la théorie **Z** à laquelle on a ajouté le schéma d'axiomes SA9. On remarquera que l'on oublie ainsi injustement le rôle joué par Skolem.

### 4.2.9 Axiomes « facultatifs »

En fait, les logiciens se sont accordés à ajouter un axiome pour des raisons techniques (l'**axiome de fondement**, ou **de régularité**, noté **AF** ; cf. ci-dessous).

[43] FRAENKEL, Abraham, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, *Math. Ann.*, vol.86, 1922, p.230-237.

[44] SKOLEM, Thoralf, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Matematikerkongressen i Helsinfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse* (Akademia Bokhandeln, Helsinki, 1923), p.217-232 ; tr. angl. in *From Frege to Gödel*, p.290-301.

[45] LENNES, N. J., On the foundations of the theory of sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol.28, 1922, p.300 (abstract).

Ils indiquent très précisément lorsqu'on utilise les axiomes pour lesquels l'unanimité n'est pas faite, tels que l'**axiome du choix AC**, l'**hypothèse du continu HC**, l'**hypothèse généralisée du continu HCG**, ou d'autres dégagés plus tard.

**AF**.- $\forall \mathbf{x} \, [\, \mathbf{x} \neq \varnothing \Rightarrow \exists \mathbf{y} \, [\, \mathbf{y} \in \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \cap \mathbf{y} = \varnothing \,]]$.

### 4.3. Le développement

Le développement des mathématiques à partir de la théorie **ZF** consiste à retrouver les objets et les théorèmes classiques. L'idée fondamentale consiste à parcourir la longue tradition de *réduction progressive des mathématiques*, d'abord à l'arithmétique puis à la théorie des ensembles, mais cette fois-ci en sens inverse.

#### 4.3.1 Survol du développement

La **logique**, **propositionnelle** puis **des prédicats**, résulte des axiomes logiques à la base de toute théorie du premier ordre. De même pour le traitement de la **logique égalitaire**. Le seul axiome d'extensionnalité permet de retrouver les propriétés de l'inclusion. L'axiome de l'union et le schéma d'axiomes de séparation permettent de définir les opérations sur les ensembles (union, intersection, différence, complémentation) et de retrouver leurs propriétés (en particulier d'algèbre de Boole). L'axiome de l'ensemble des parties permet de définir cet ensemble et de retrouver ses propriétés. Tout ceci est facile pour celui qui connaît déjà la théorie élémentaire des ensembles, sous forme non axiomatisée.

Le premier problème surgit lors de l'étude des **relations**, car aucun axiome ne postule l'existence des couples. Mais, en fait, on se sert d'une réduction antérieure, peu connue en dehors de la théorie axiomatique des ensembles, due à Norbert Wiener en 1914[46], simplifiée par Kasimir Kuratowski en 1921[47]. On définit :

$\mathbf{(a, b) = \{\{a, b\},\{b\}\}}$,

et on vérifie qu'on a bien la propriété fondamentale sur les couples, à savoir que deux couples sont égaux si et seulement si ils ont même première coordonnée et même seconde coordonnée.

Ceci permet de définir les triplets et les quadruplets, le produit cartésien de « deux » ensembles ainsi que leurs propriétés, les relations (par exemple *à la* BOURBAKI comme un triplet $\mathbf{(A, B, G)}$ avec $\mathbf{G \subseteq A \times B}$), les relations d'ordre et d'équivalence. Les fonctions se définissent alors comme des relations particulières, comme cela avait été indiqué par Peano en 1911[48], et d'une façon bien

46 WIENER, Norbert, A simplification of the logic of relations, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol.17, p.387-390; = *From Frege to Gödel*, p.199-215.

47 KURATOWSKI, K., Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles, *Fund. Math.*, vol.2, 1921, p.161-171.

48 PEANO, Giuseppe, Sulla definizione di funzione, *Rendiconti della R. Accademia del Lincei*, Serie 5ª, vol. XX, 1er sem., 1911, p.3-5 ; = *Opere Scelte*, vol.1, 1957, p.363-365.

connue de nos jours. On note une intervention de l'axiome du choix, première apparition dans l'ordre de ce développement, lorsqu'on a besoin d'utiliser le fait qu'une application surjective admette un inverse à droite. On s'intéresse ensuite aux familles d'ensembles, avec l'utilisation de l'axiome de la somme et, éventuellement, de l'axiome du choix.

L'axiome de l'infini permet de définir un ensemble $\mathbb{N}$ vérifiant les axiomes de Peano. Après avoir justifié les définitions par récurrence, on peut définir l'addition et la multiplication et retrouver toutes les propriétés habituelles.

Nous avons traité ci-dessus des réductions successives des mathématiques à la théorie des ensembles. Il suffit donc, comme nous l'avons déjà indiqué, de refaire le chemin en sens inverse pour retrouver toutes les mathématiques connues.

### 4.3.2 Sentiment d'un bon fondement

Le survol que nous venons d'effectuer, le cas échéant prolongé par un développement plus détaillé, tel que l'on peut trouver dans les livres cités en référence, doit suffire à donner le sentiment que toutes les mathématiques classiques semblent bien se coder dans cette théorie ZF.

Le problème se pose donc de savoir s'il en est bien ainsi, en se référant aux spécialistes des diverses disciplines. Deux problèmes sont en fait soulevés : le recours à des axiomes forts pour la théorie avancée des cardinaux, et celui de la théorie des catégories. La théorie des catégories a fini par se modéliser au sein de la théorie ZF. La théorie des cardinaux donne lieu à de nombreux axiomes nouveaux dont on cherche l'interdépendance[49].

### Conclusion

Nous en sommes ainsi arrivés à l'élaboration d'un fondement mathématique sur lequel la plupart des mathématiciens se reposent. Est-ce à dire qu'il n'y a plus de problèmes ? Il n'y en a plus en pratique, mais on aimerait bien être sûr, par exemple, que ce système est vraiment exempt de contradictions. Ceci est l'objet d'une autre histoire.

[49] On pourra consulter à ce sujet KANAMORI, A., *The higher Infinite*, Springer, 1994, XXIV+536 p.