

Chapitre 3

Historique de la logique des prédicats

3.1 Analyse des propositions

3.1.1 Nécessité d'une analyse des propositions

3.1.1.1 ARISTOTE

ARISTOTE analyse les propositions atomiques comme étant toutes de la forme :

Sujet – copule – prédicat,

où la *copule* est le verbe « être ».

3.1.1.2 DE MORGAN

DE MORGAN s'aperçoit que l'analyse précédente est insuffisante. Il introduit alors la notion de *relation* et analyse les propositions atomiques de la façon suivante :

Dans la chaîne ci-dessous, il y a exclusion du concret, la forme étant préservée à chaque étape :

		<i>Hypothèse</i>
<i>(Positivement vrai)</i>	<i>Tout homme est un animal</i>	
	<i>Tout homme est Y</i>	<i>Y a une existence</i>
	<i>Tout X est Y</i>	<i>X a une existence</i>
	<i>Tout X — Y</i>	<i>— est une relation <u>transitive</u></i>
	<i>α de X — Y</i>	<i>α est une fraction $<$ ou $= 1$</i>
<i>(Probabilités β)</i>	<i>β de X — Y</i>	<i>β est une fraction $<$ ou $= 1$</i>

La dernière est très proche des jugements purement formels, avec aucun point concret, sauf la transitivité de la copule. Mais « est » est plus particulier que le

symbole —, qui signifie seulement une copule transitive : car « est » a la transitivité, et plus encore. Omettez le mot transitif, et la dernière ligne dessine la forme pure du jugement.

[MOR-58], n° III, p. 178

3.1.1.3 FREGE

FREGE introduit la notion générale de prédicat, sous le nom de *fonction* :

§3. Sujet et prédicat. Contenu conceptuel.

La distinction entre sujet et prédicat n'a pas à être faite dans ma façon de représenter un jugement. Afin de justifier ceci, je remarque que le contenu de deux jugements peut différer de deux manières : soit que les conséquences dérivables du premier, quand il est combiné avec certains jugements, suivent toujours aussi du second, quand il est combiné avec ces mêmes jugements, [et réciproquement,] ou ce n'est pas le cas. Les deux propositions « les Grecs battirent les Perses à Platée » et « les Perses furent battus par les Grecs à Platée » diffèrent dans la première manière. Même si on peut détecter une légère différence de signification, cette commodité l'emporte. J'appellerai désormais la partie du contenu qui est la même dans les deux le contenu conceptuel. Puisque lui seul est de quelque importance pour notre idéographie, nous n'avons pas à introduire de distinction entre les propositions ayant le même contenu conceptuel. Si on dit du sujet qu'il « est le concept avec lequel le jugement est concerné », ceci est également vrai de l'objet. Nous pouvons alors seulement dire que le sujet « est le concept avec lequel le jugement est concerné », ceci est également vrai de l'objet. Nous pouvons alors seulement dire que le sujet « est le concept avec lequel le jugement est principalement concerné ». Dans le langage ordinaire, la place du sujet dans la suite des mots a la signification d'une place distinguée, à laquelle nous le plaçons afin d'attirer l'attention de l'auditeur (voir aussi le §9). Ceci peut, par exemple, avoir pour but de désigner une certaine relation du jugement donné à d'autres et par ce moyen de rendre plus facile à l'auditeur la compréhension du contexte. Cependant, toutes ces particularités du langage ordinaire, qui résultent seulement de l'interaction du locuteur et de l'auditeur – comme lorsque, par exemple, le locuteur prend en compte l'attente de l'auditeur et cherche à le mettre dans le bon chemin avant que la proposition complète soit énoncée – n'a rien qui leur réponde dans mon langage formulaire, puisque dans un jugement je considère seulement ce qui influence ses conséquences possibles. Toute chose nécessaire pour une inférence correcte est pleinement exprimée, mais ce qui n'est pas nécessaire n'est pas indiqué en général ; rien n'est laissé au jugé. En ceci j'ai suivi fidèlement l'exemple du langage formulaire des mathématiques.

[...]

Fonction.

§9. Définition des mots « fonctions » et « argument ». Fonctions de plusieurs arguments. Place des arguments. Sujet, objet.

Supposons que la circonstance que l'hydrogène est plus léger que le dioxyde de carbone soit exprimé dans notre langage formulaire ; nous pouvons alors remplacer le signe pour hydrogène par le signe pour oxygène ou par celui pour azote. Ceci change la signification en ceci que « oxygène » ou « azote » entrent dans la relation dans laquelle « hydrogène » était avant. Si nous imaginons qu'une expression peut ainsi être altérée, elle se décompose en un composant stable, représentant la relation, et le

signe, regardé comme remplaçable par d'autres, qui dénote les objets entrant dans cette relation. Le premier composant est ce que j'appelle une fonction, l'autre son argument. Cette décomposition n'a rien à faire avec le contenu conceptuel ; elle provient de ce que nous regardons l'expression d'une façon particulière. Car avec la conception esquissée ci-dessus, « hydrogène » est l'argument et « plus léger que le dioxyde de carbone » la fonction ; mais nous pouvons aussi concevoir le même contenu conceptuel de telle façon que « le dioxyde de carbone » devienne l'argument et « est plus lourd que l'hydrogène » la fonction. Nous regarderons alors nécessairement « le dioxyde de carbone » comme remplaçable par d'autres idées, telles que « acide chlorhydrique » ou « ammoniac ».

« La circonstance que le dioxyde de carbone est plus lourd que l'hydrogène » et « la circonstance que le dioxyde de carbone est plus lourd que l'oxygène » ont la même fonction et des arguments différents si nous regardons « hydrogène » et « oxygène » comme arguments ; d'autre part, elles ont des fonctions différentes et même argument si nous regardons « le dioxyde de carbone » comme l'argument.

Pour considérer un autre exemple, prenons « la circonstance que le centre de masse du système solaire n'a pas d'accélération si seules les forces internes agissent sur le système solaire ». Ici « système solaire » apparaît à deux places. Ainsi nous pouvons considérer ceci comme une fonction de l'argument « système solaire » de plusieurs façons, suivant que nous regardons « système solaire » comme remplaçable par quelque chose d'autre dans sa première occurrence, dans sa seconde ou dans les deux (mais dans ces deux places par la même chose). Ces trois fonctions sont toutes différentes. La situation est la même dans la proposition selon laquelle Caton tua Caton. Si nous regardons « Caton » comme remplaçable dans sa première occurrence « tua Caton » est la fonction ; si nous regardons « Caton » comme remplaçable dans sa seconde occurrence, « tué par Caton » est la fonction ; si, enfin, nous regardons « Caton » comme remplaçable dans ses deux occurrences, « se tuer soi-même » est la fonction.

Nous pouvons maintenant exprimer ceci de façon générale.

Si dans une expression, dont le contenu n'est pas nécessairement capable de devenir un jugement, un signe simple ou composé a une ou plusieurs occurrences et si nous regardons ce signe comme remplaçable dans toutes ou partie de ses occurrences par quelque chose d'autre (mais partout par la même chose), alors nous appelons la partie qui reste invariante dans cette expression une fonction, et la partie remplaçable l'argument de la fonction.

Puisque, suivant ceci, quelque chose peut être un argument mais aussi apparaître dans la fonction à des places où il n'est pas considéré comme remplaçable, nous distinguerons dans la fonction entre les places d'argument et les autres.

[...]

Si, étant donné une fonction, nous pensons d'un signe qui était auparavant regardé comme non remplaçable comme étant remplaçable dans quelques-unes ou toutes ses occurrences, alors en adoptant cette conception nous obtenons une fonction qui a un nouvel argument en addition de ceux qu'elle avait auparavant. Ce procédé nous conduit aux fonctions de deux ou plusieurs arguments. Ainsi, par exemple, « la circonstance que l'hydrogène est plus léger que le dioxyde de carbone » peut être regardé comme fonction des deux arguments « hydrogène » et « dioxyde de carbone ».

Dans l'esprit du locuteur le sujet est ordinairement l'argument principal ; le suivant en importance apparaît souvent comme objet.

[...]

§10 Utilisation des lettres comme signes de fonction. « A a la propriété ϕ », « B a la relation ψ avec A ». « B est le résultat d'une application de la procédure ψ à l'objet A ».

Afin d'exprimer une fonction indéterminée de l'argument A, nous écrivons A, entre parenthèses, à la droite d'une lettre, *par exemple* :

$$\phi(A).$$

De même :

$$\psi(A, B)$$

signifie une fonction des deux arguments A et B, et qui n'est pas plus déterminée que cela. Ici les occurrences de A et de B entre parenthèses représentent les occurrences de A et de B dans la fonction, *sans indiquer si elles sont simples ou multiples pour A ou pour B*. Ainsi en général :

$$\psi(A, B)$$

est différent de :

$$\psi(B, A).$$

Les fonctions indéterminées de plus d'arguments sont exprimées de façon analogue.

Nous pouvons lire :

$$| \text{---} \phi(A)$$

comme « A a la propriété ϕ ».

$$| \text{---} \psi(A, B)$$

peut être traduit par « B est en relation ψ avec A » ou « B est le résultat d'une application de la procédure ψ à l'objet A. »

[FRE-79]

3.1.2 Variables et constantes

3.1.2.1 FREGE

Les variables, introduites par ARISTOTE, furent utilisées régulièrement en logique et en mathématiques. Le concept de variable ne fut cependant explicité pour la première fois qu'en 1879 par FREGE :

§1. Lettres et autres signes.

Les signes habituellement utilisés dans la théorie générale des grandeurs sont de deux sortes. La première consiste de lettres qui représentent chacune soit un nombre laissé indéterminé, soit une fonction laissée indéterminée. Cette indétermination rend possible l'utilisation de lettres pour exprimer la validité universelle des propositions, comme dans :

$$(a + b)c = ac + bc.$$

L'autre sorte consiste de signes, tels que +, -, $\sqrt{\quad}$, 0, 1, 2, et qui ont chacun une signification particulière.

J'adopte cette idée fondamentale de distinguer deux sortes de signes, qui malheureusement n'est pas strictement respectée dans la théorie des grandeurs (voir 1, log,

sin, Lim) afin de l'appliquer dans le domaine plus général de la pensée pure. Je divise ainsi tous les signes que j'utilise en ceux qui peuvent être pris pour signifier des choses variées et ceux qui ont une signification complètement déterminée. Les premiers sont les lettres et ils serviront principalement à exprimer la généralité. Mais, bien que la signification des lettres est indéterminée, nous devons insister sur le fait que dans un contexte donné une lettre garde la même signification dès qu'elle en a reçu une.

[FRE-79]

3.1.2.2 RUSSELL

L'idée de variable, telle qu'elle apparaît dans ce travail, est plus générale que celle qui est explicitement utilisée dans les mathématiques ordinaires. Dans les mathématiques ordinaires, une variable représente généralement un nombre ou une quantité indéterminée. En logique mathématique, tout symbole dont la signification n'est pas déterminée est appelée une variable, et les déterminations variées qu'elle est susceptible de désigner sont appelées les valeurs de cette variable. Les valeurs peuvent être tout ensemble d'entités, de propositions, de fonctions, de classes ou de relations, suivant les circonstances. Si un énoncé porte sur 'Mr A et Mr B', 'Mr A' et 'Mr B' sont des variables dont les valeurs sont des hommes. Une variable peut soit avoir une classe de valeurs déterminée conventionnellement, soit (en l'absence de toute indication sur la classe des valeurs) avoir comme classe de valeurs toutes les déterminations qui rendent signifiant l'énoncé dans lequel elle apparaît. Ainsi quand un manuel de logique énonce que « A est A », sans indication sur ce que A peut être, ceci signifie que tout énoncé la forme « A est A » est vrai. Nous pouvons dire qu'une variable est restreinte quand ses valeurs sont confinées à seulement quelques-unes dont elle est capable ; sinon nous dirons qu'elle est non restreinte. Ainsi quand une variable non restreinte apparaît, elle représente tous les objets tels que l'énoncé concerné soit signifiant (i.e. vrai ou faux) concernant cet objet. Pour les propos de la logique, les variables non restreintes sont plus commodes que les variables restreintes, et nous les emploierons toujours.

[WR-10], ch I, variables

3.1.3 Les quantificateurs

La notion de quantificateur est due à FREGE (1879). Sa présentation est bien meilleure que toutes celles qui suivent mais elle reste inconnue jusqu'à sa découverte par RUSSELL. Aussi fut-elle développée indépendamment de FREGE par MITCHELL (1883), PEIRCE (1885) et PEANO (1889). Nous commencerons d'abord par eux.

3.1.3.1 MITCHELL

Soit F un polynôme logique de termes de classes et de leurs négations, c'est-à-dire une somme de produits de tels termes. Alors les formes suivantes sont respectivement celles des propositions universelle et particulière :

Tout U est F, noté ici F_1

Quelque U est F, noté ici F_u .

Ces deux formes sont telles que :

$$\overline{F_1} + F_u = \infty$$

$$\overline{F}_1 F_u = 0;$$

c'est-à-dire que F_1 et F_u sont les négations l'une de l'autre; c'est-à-dire que $(\overline{F}_1) = F_u$. Les deux propositions F_1 et F_u satisfont l'équation :

$$F_1 \overline{F}_u = 0,$$

et sont « contraires » l'une de l'autre. Ainsi, en prenant la négation de chaque côté, nous obtenons $\overline{F}_u + F_1 = \infty$; c'est-à-dire que F_u et \overline{F}_u sont « sub-contraires » l'une de l'autre. Le trait sur le F ci-dessus n'indique pas la négation de la proposition, mais seulement la négation du prédicat F . La négation de la proposition F_1 n'est pas \overline{F}_1 , mais (\overline{F}_1) , ce qui est, d'après ci-dessus, $= F_u$.

[MIT-83], p. 72

Ceci est la première étape dans la séparation du quantificateur et du prédicat, mais ce n'est pas encore très clair. Remarquons que, dans la suite du texte, MITCHELL introduit les symboles « Π » et « Σ », mais non en tant que quantificateurs.

3.1.3.2 PEIRCE

La notion de quantificateur est très claire chez PEIRCE :

Nous en venons maintenant à la distinction entre « quelque » et « tout », distinction qui est précisément en rapport avec celle entre la vérité et la fausseté; c'est-à-dire qu'elle est descriptive.

Tous les essais pour introduire cette distinction dans l'algèbre de Boole furent plus ou moins des échecs complets jusqu'à ce que M. Mitchell montre comment elle devait être effectuée. Sa méthode consiste à partager l'expression entière en deux, une expression booléenne pure référant à un individu et une partie quantifiante disant ce qu'est cet individu. Ainsi, si k signifie « c'est un roi » et h « il est heureux », la partie booléenne $(\overline{k} + h)$ signifie que l'individu dont on parle soit n'est pas roi soit est heureux. Maintenant, appliquant la quantification, nous pouvons écrire :

$$\text{Tout } (\overline{k} + h)$$

pour signifier que ceci est vrai de tout individu de l'univers (restreint), ou :

$$\text{Quelque } (\overline{k} + h)$$

pour signifier qu'il existe un individu qui soit n'est pas roi soit est heureux.

[...]

Afin de rendre la notation aussi imagée que possible nous utilisons Σ pour 'quelque', suggérant ainsi une somme, et Π pour 'tout', suggérant un produit. Ainsi $\Sigma_i x_i$ signifie que x est vrai pour quelques-uns des individus notés i ou :

$$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{etc.}$$

De la même façon, $\Pi_i x_i$ signifie que x est vrai pour tous ces individus, ou :

$$\Pi_i x_i = x_i . x_j . x_k . \text{etc.}$$

Si x est une relation simple, $\Pi_i \Pi_j x_{ij}$ signifie que tout i est dans la relation avec chaque j , $\Sigma_i \Pi_j x_{ij}$ signifie qu'il existe un i qui est dans la relation avec chaque j , $\Pi_j \Sigma_i x_{ij}$ que pour tout j il existe un i qui est dans cette relation avec j , $\Sigma_i \Sigma_j x_{ij}$ qu'il existe un i en relation avec un j . On doit remarquer que $\Sigma_i x_i$ et $\Pi_i x_i$ sont seulement 'semblables' à une somme et à un produit; ils ne sont pas strictement de cette nature, puisque les individus de l'univers peuvent ne pas être énumérables.

[PEI-85]

La notation de PEIRCE est adoptée par SCHRÖDER dans ses *Leçons*. Les mots *quantificateur* et *quantification* sont de PEIRCE. La grande nouveauté de PEIRCE est de séparer le quantificateur du prédicat.

3.1.3.3 PEANO

Si les propositions a, b contiennent des êtres indéterminés, tels que x, y, \dots , c'est-à-dire que ce sont des relations entre ces êtres, alors $a \supset_{x,y,\dots} b$ signifie 'quels que puissent être x, y, \dots , b est déduite de la proposition a '. Pour éviter le risque d'ambiguïté, nous écrivons seulement \supset au lieu de $a \supset_{x,y,\dots} b$.

[PEA-89], X

Ainsi $a \supset_{x,y,\dots} b$ signifie $\forall x, \forall y, \forall \dots (a \supset b)$.

3.1.4 FREGE

Généralité.

§11. Lettres gothiques. La concavité dans le trait de contenu. Remplacement des lettres gothiques. Leur champ. Lettres en italique.

Dans l'expression d'un jugement nous pouvons toujours regarder la combinaison des signes à droite de $| - - - -$ comme une fonction d'un des signes apparaissant dans cette expression. Si nous remplaçons cet argument par une lettre gothique et si nous introduisons une concavité surmontée de cette lettre gothique dans le contenu de jugement, comme ceci :

$$| - - \mathcal{A} - - \phi(\mathcal{A}),$$

ceci signifie le jugement que quoi que nous prenions pour l'argument la fonction est un fait. *Puisqu'une lettre utilisée comme un signe pour une fonction, telle que ϕ dans $\phi(\mathcal{A})$, peut elle-même être regardée comme l'argument d'une fonction, sa place peut être prise, de la manière indiquée, par une lettre gothique. La signification d'une lettre gothique est seulement sujette aux restrictions naturelles suivantes : si une combinaison de signes suivant un trait de contenu peut devenir un jugement (§2), cette possibilité reste non affectée par un tel remplacement, et si la lettre gothique apparaît comme un signe de fonction, cette circonstance doit être prise en compte. Toutes les autres conditions à imposer sur ce qui remplacer la lettre gothique doivent être incorporées dans le jugement. D'un tel jugement, nous pouvons toujours dériver un nombre arbitraire de jugements de contenu de moindre généralité en substituant chaque fois quelque chose à la lettre gothique et en enlevant la concavité du trait de contenu. Le trait horizontal à la gauche de la concavité dans :*

$$| - - \mathcal{A} - - \phi(\mathcal{A})$$

est le trait de contenu pour la circonstance que, quoi que nous pouvions mettre à la place de \mathcal{A} , $\phi(\mathcal{A})$ tient ; le trait horizontal à la droite de la concavité est le trait de contenu de $\phi(\mathcal{A})$, et ici nous devons imaginer que quelque chose de défini a été substitué à \mathcal{A} .

D'après ce que nous venons de dire sur la signification du trait de contenu, il est facile de voir ce que signifie une expression comme :

$$- - \mathcal{A} - - X(\mathcal{A})$$

Cette expression peut apparaître comme une partie d'un jugement, comme dans :

$$| - - | - - \mathcal{A} - - X(\mathcal{A}) \text{ ou a faire}$$

Il est clair que nous ne pouvons pas dériver des jugements moins généraux de ces jugements en substituant quelque chose de défini à \mathcal{A} , comme nous pouvions le faire pour :

$$| - - \mathcal{A} - - \phi(\mathcal{A}),$$

$| - - | - - \mathcal{A} - - X(\mathcal{A})$ nie que, quoi que nous mettions à la place de \mathcal{A} , $X(\mathcal{A})$ est toujours un fait. Mais ceci ne nie en aucune façon la possibilité de donner un Δ tel que $X(\Delta)$ soit un fait.

a faire

signifie que le cas suivant lequel $- - \mathcal{A} - - X(\mathcal{A})$ est affirmé et \mathcal{A} est nié n'apparaît pas. Mais ceci ne nie en aucune façon que le cas suivant lequel $X(\Delta)$ est affirmé et \mathcal{A} est nié puisse apparaître ; car, comme nous l'avons vu, $X(\mathcal{A})$ peut être affirmé et $- - - - \mathcal{A} - - X(\mathcal{A})$ peut encore être nié. Ainsi nous ne pouvons pas faire ici de substitution arbitraire pour \mathcal{A} sans préjudice pour la vérité du jugement. Ceci explique pourquoi la concavité avec la lettre gothique écrite dedans est nécessaire : elle délimite le champ [Gebiet] de la généralité signifiée par cette lettre. La lettre gothique a une signification fixée dans ce champ ; dans un tel jugement la même lettre gothique peut apparaître dans différents champs sans que la signification attribuée à l'une dans un champ soit étendue aux autres. Le champ d'une lettre gothique peut en inclure un autre, comme il est montré par l'exemple :

a faire

Dans ce cas elles doivent être choisies différentes ; nous ne pourrions pas remplacer *e* par \mathcal{A} . Remplacer une lettre gothique partout dans son champ par une autre est, bien sûr, permis, à condition que des lettres initialement différentes le soit aussi après. Ceci n'a pas d'effet sur le contenu. D'autres substitutions sont permises seulement si la concavité suit immédiatement le trait de jugement, c'est-à-dire si le contenu du jugement en entier constitue le champ de la lettre gothique. Puisque, suivant ceci, ce cas est un cas particulièrement important, j'introduirai l'abréviation suivante. Une lettre en italique aura toujours comme champ le contenu du jugement en entier. Si une lettre en italique apparaît dans une expression qui n'est pas précédée par un trait de jugement, l'expression est sans signification. Une lettre en italique peut toujours être remplacée par une lettre gothique qui n'apparaît pas déjà dans le jugement ; mais alors la concavité doit être introduite immédiatement après le trait de jugement. Par exemple, au lieu de :

$$| - - - - X(a)$$

nous pouvons écrire :

$$| - - \mathcal{A} - - X(\mathcal{A})$$

si \mathcal{A} apparaît seulement aux places d'argument de $X(\mathcal{A})$.

[...]

§12. Il y a quelques objets tels que non $-$. Il n'y a pas $-$. Il y a quelque $-$. Chaque. Tout. Connexions causales. Aucun. Quelque non. Quelque. Il est possible que $-$.

Nous pouvons maintenant considérer quelques combinaisons de signes.

$$| - - | - - \mathcal{A} - - X(\mathcal{A})$$

signifie que nous pouvons trouver quelque objet, disons Δ , tel que $X(\Delta)$ ne puisse pas être nié. Nous pouvons aussi traduire ceci par « il y a quelques objets qui n'ont pas la propriété X ».

La signification de :

$$| \text{---} \mathcal{A} \text{---} | \text{---} X(\mathcal{A})$$

diffère de celle-ci. La formule signifie « quel que puisse être \mathcal{A} , $X(\mathcal{A})$ peut toujours être nié », ou « il n'existe aucune chose ayant la propriété X », ou, si nous appelons une chose qui a cette propriété X un X , « il n'y a pas de X ».

$$\text{---} \mathcal{A} \text{---} | \text{---} \Lambda(\mathcal{A})$$

est nié par :

$$| \text{---} | \text{---} \mathcal{A} \text{---} | \text{---} \Lambda(\mathcal{A})$$

Nous pouvons alors traduire cette dernière formule par « il y a des Λ »¹.

$$| \text{---} \mathcal{A} \text{---} | \text{---} P(\mathcal{A})$$

$$| \text{---} X(\mathcal{A})(\text{affaire})$$

signifie « quoi que nous puissions mettre à la place de \mathcal{A} , le cas suivant lequel $P(\mathcal{A})$ serait nié et $X(\mathcal{A})$ affirmé n'arrive pas ».

[...]

Nous pourrions aussi traduire ceci par « si quelque chose a la propriété X , il a aussi la propriété P », ou « tous les X sont des P ».

Ceci est la façon d'exprimer les connexions causales.

[FRE-79], X

3.1.4.1 RUSSELL

Le problème de la quantification est abordée seulement superficiellement dans *Les principes des mathématiques* de 1903. Mais il est largement traité dans les *Principia Mathematica* de 1910 :

À toute fonction propositionnelle φx correspond une série, ou collection, de valeurs, consistant de toutes les propositions (vraies ou fausses) qui peuvent être obtenues en donnant chaque détermination possible à x dans φx . Une valeur de x pour laquelle φx vrai sera dite « satisfaire » φx . Maintenant au regard de la vérité ou de la fausseté des proposition de cette série trois cas importants doivent être notés et symbolisés. Ces cas sont donnés par trois propositions dont l'une au moins doit être vraie. Soit (1) que toutes les propositions de la série sont vraies, soit (2) que quelques propositions de la série sont vraies, soit (3) qu'aucune proposition de la série n'est vraie. L'énoncé (1) est symbolisé par « $(x).\varphi x$ » et le (2) par « $(\exists x).\varphi x$ ».

[...]

Le symbole « $(x).\varphi x$ » peut être lu « toujours φx », ou « φx est toujours vrai », ou « φx est vrai pour toutes les valeurs possibles de x ». Le symbole « $(\exists x).\varphi x$ » peut être lu « il existe un x pour lequel φx est vrai », ou « il existe un x satisfaisant φx », et ils sont ainsi conformes à la forme naturelle de l'expression de la pensée.

[WR-10], Introduction

1. Ceci doit être compris dans un sens qui inclut le cas « il existe un Λ » aussi bien. Si, par exemple, $\Lambda(x)$ signifie la circonstance que x est une maison, alors :

$$| \text{---} | \text{---} \mathcal{A} \text{---} | \text{---} \Lambda(\mathcal{A})$$

se lit « il y a des maisons ou il y a au moins une maison ».

3.1.5 Définition précise de la notion de formule

3.1.5.1 HILBERT

La définition précise de la notion de formule du calcul des prédicats semble due, pour la première fois et sous une forme encore imparfaite, à HILBERT et ACKERNANN en 1928 :

Afin de préparer un traitement systématique du calcul des prédicats, nous donnons premièrement une revue exacte des notations employées.

Parmi les symboles qui apparaissent dans le calcul des prédicats il y a premièrement toutes les variables de différentes sortes. Les variables sont toujours des lettres en italique, majuscules ou minuscules. Nous distinguerons :

1. Les variables d'énoncés : X, Y, Z, \dots
2. Les variables individuelles : x, y, z, \dots
3. Les variables de prédicats : $F(\cdot), G(\cdot, \cdot), H(\cdot, \cdot, \cdot), \dots$

Ici les variables de prédicats avec des nombres différents de places d'arguments comptent comme des variables différentes, même quand les lettres majuscules en italique sont les mêmes.

Nous désirons maintenant expliquer ce qui doit être compris par formule du calcul des prédicats.

Avant tout, nous dirons provisoirement que nous entendons par formule une expression construite de manière signifiante à partir des variables ci-dessus au moyen des connecteurs propositionnels $\&, \vee, \overline{}, \rightarrow$ et \sim et des quantificateurs universel et existentiel. Cependant le point de vue axiomatique de la section suivante, dans lequel les preuves dérivent de règles purement formelles sans appel à la signification des symboles logiques, rend nécessaire la caractérisation des expressions désignées comme formules par une description de leur structure formelle seule, et d'éviter des concepts tels que « signifiant ».

Pour commencer, disons que les variables individuelles (i.e. les lettres en italique minuscules) peuvent apparaître dans les formules ainsi que les quantificateurs universel et existentiel correspondants. S'il apparaît dans une formule, simultanément avec une variable individuelle, disons x , un quantificateur universel ou existentiel correspondant - dans ce cas (x) ou (Ex) - alors la variable en question dans la formule est dite liée, et sinon libre.

Par le terme formule, nous entendons dorénavant les combinaisons de symboles, et seulement ceux-ci, de notre calcul qui peuvent être montrés tels par un nombre fini d'applications des règles suivantes :

1. Une variable propositionnelle est une formule ;
2. Les variables de prédicats dont les places d'arguments sont remplies par des variables individuelles sont des formules ;
3. Si une combinaison de symboles A est une formule, alors \overline{A} est aussi une formule ;
4. Si A et B sont des formules telles que la même variable individuelle n'apparaît pas liée dans l'une et libre dans l'autre, alors

$$A\&B, A\vee B, A\rightarrow B \text{ et } A\sim B$$

sont aussi des formules ;

5. Si $A(x)$ est une formule dans laquelle la variable x apparaît comme une variable libre, alors $(x)A(x)$ et $(Ex)A(x)$ sont aussi des formules. L'énoncé correspondant est aussi vrai pour les autres variables libres.

Insistons sur le fait que, suivant cette définition, la même variable ne peut pas apparaître dans une formule à la fois comme libre et liée.

[H-A-28], III §5

Remarquons l'intervention du mot « fini ».

3.1.6 Variable libre, variable liée

3.1.6.1 FREGE

Nous avons vu précédemment que FREGE a une idée claire du concept de « variable liée » et de champ d'une telle variable, mais il ne lui donne pas de nom.

3.1.6.2 PEANO

PEANO fait la distinction entre variable liée et variable libre dans un texte de 1897, mais pas sous le nom actuel :

Dans ces explications, nous dirons qu'une lettre dans une formule est réelle ou apparente, suivant le cas considéré, selon que la valeur de la formule dépend ou non du nom de cette lettre. Ainsi dans $\int_0^1 x^m dx$ la lettre x est apparente et la lettre m réelle. Toutes les lettres apparaissant dans un théorème sont apparentes, puisque sa vérité est indépendante du nom des lettres.

[PEA-97], p. 23

3.1.6.3 RUSSELL

RUSSELL reprend les notations de PEANO dans les *Principia* :

Variables apparentes. Le symbole « $(x).\varphi x$ » dénote une proposition définie, et il n'y a pas de distinction à faire en ce qui concerne la signification entre « $(x).\varphi x$ » et « $(y).\varphi y$ » quand elles apparaissent dans le même contexte. Ainsi le « x » dans « $(x).\varphi x$ » n'est pas un constituant ambigu d'une proposition dans laquelle « $(x).\varphi x$ » apparaît ; [...] Le symbole « $(x).\varphi x$ » a quelque analogie avec le symbole :

$$\int_a^b \varphi(x)dx.$$

[...]

Le x qui apparaît dans « $(x).\varphi x$ » ou « $(\exists x).\varphi x$ » est appelé (suivant Peano) une « variable apparente ». [...] Une proposition dans laquelle x apparaît comme une variable apparente n'est pas une fonction de x . Ainsi, par exemple, « $(x). x = x$ » signifie « toute chose est égale à elle-même ». Ceci est une constante absolue, non une fonction de la variable x .

[WR-10], Introduction

3.2 La vérité en logique des prédicats

3.2.1 FREGE

Nous avons vu, à propos de la logique des propositions, que Frege ne distingue pas entre logique des propositions et logique des prédicats. Aux axiomes déjà vus (ceux de la logique des propositions) il y ajoute un seul autre axiome (celui de \forall -substitution) :

§22. La loi fondamentale de la généralité, conséquences.

$$|- |- | - - f(c) \quad (58)$$

$$|- |- \mathcal{A} - - f(\mathcal{A})$$

$- - \mathcal{A} - - f(\mathcal{A})$ signifie que $f(\mathcal{A})$ a lieu quoi que nous entendions par \mathcal{A} . Ainsi si $- - \mathcal{A} - - f(\mathcal{A})$ est affirmé, $f(c)$ ne peut pas être nié. C'est cela que cette proposition exprime.

[FRE-79]

FREGE en dérive un certain nombre de lois. Nous les énonçons ci-dessous quelques-unes dans notre langage moderne :

$$(59) \quad g(b) \rightarrow (\neg f(b) \rightarrow \neg \forall x (g(x) \rightarrow f(x))).$$

Exemple. Soit b une autruche, c'est-à-dire un individu de cette espèce animale, si $g(a)$ signifie "A est un oiseau" et $f(A)$ "A peut voler" alors nous aurons le jugement "si cette autruche est un oiseau et ne peut pas voler alors on peut inférer de ceci que quelques oiseaux ne peuvent pas voler."

[FRE-79]

$$(60) \quad \forall x (h(x) \rightarrow (g(x) \rightarrow f(x))) \rightarrow (g(a) \rightarrow (h(a) \rightarrow f(a)))$$

$$(61) \quad \forall x (g(x) \rightarrow (\forall y (g(y) \rightarrow f(y) \rightarrow f(x)))$$

Et quelques autres. Ainsi ces lois ne portent que sur des prédicats à une seule variable libre et seul le quantificateur universel intervient.

3.2.2 RUSSELL

3.2.2.1 Introduction

WHITEHEAD et RUSSELL étudient, dans leur *Principia*, la logique des prédicats (sous le nom de *théorie des variables apparentes*) dans la section B de la première partie, après avoir étudié la logique propositionnelle (sous le nom de *théorie de la déduction*) dans la section A. La table des matières est la suivante :

Section B. Théorie des variables apparentes.

*9. *Extension de la théorie de la déduction à des propositions d'un type plus élevé.*

*10. *Théorie des propositions contenant une variable apparente.*

*11. *Théorie des propositions contenant deux variables apparentes.*

[WR-10]

Comme son titre l'indique, dans le paragraphe *9, RUSSELL étend les résultats de la logique propositionnelle à la logique des prédicats (d'ordres plus élevés que les seuls prédicats du premier ordre, les seuls que nous avons considérés). Pour le premier ordre le seul problème est qu'on a maintenant des variables libres, et nous ne nous attarderons donc pas sur ce paragraphe :

*Le but et l'intérêt du présent numéro sont purement philosophiques, à savoir montrer comment, au moyen de certaines propositions primitives, nous pouvons déduire la théorie de la déduction pour des propositions contenant des variables apparentes de la théorie de la déduction pour les propositions élémentaires. D'un point de vue purement technique la distinction entre les propositions élémentaires et les autres peut être ignorée aussi longtemps que les propositions n'apparaissent pas comme des variables apparentes ; nous pouvons alors regarder les propositions primitives de *1 comme s'appliquant aux propositions de tous les types, et procéder comme dans *10, où le développement purement technique est un résumé.*

[WR-10]

3.2.2.2 Théorèmes concernant les prédicats monadiques

Le paragraphe *10 est très bien résumé par son introduction, dont nous citons les faits principaux :

*Nous avons prouvé en *3.33 que :*

$$p \supset q. q \supset r. \supset .p \supset r.$$

Posons $p =$ Socrate est Grec,

$q =$ Socrate est un homme,

$r =$ Socrate est mortel.

Alors nous avons « Si 'Socrate est Grec' implique que 'Socrate est un homme' et si 'Socrate est un homme' implique que 'Socrate est mortel' alors 'Socrate est Grec' implique que 'Socrate est mortel' ». Mais ceci ne prouve pas que si tous les Grecs sont des hommes et que tous les hommes sont mortels alors tous les Grecs sont mortels.

Posant $\varphi x. =$ x est Grec,

$\psi x. =$ x est un homme,

$\xi x. =$ x est mortel,

nous avons à prouver :

$$(x).\varphi x \supset \psi x : (x).\psi x \supset \xi x : \supset : (x).\varphi x \supset \xi x.$$

C'est de telles propositions que nous avons à prouver dans ce numéro.

[...]

*Nous supposerons, dans ce numéro, ce qui a été prouvé au *9, que les propositions de *1–*5 peuvent être appliquées à des propositions telles que $(x).\varphi x$ et $(\exists x).\varphi x$. Au lieu de la méthode adoptée au *9, il est possible de prendre la négation et la disjonction de nouvelles idées primitives, appliquées à des propositions contenant des variables apparentes, et de supposer que, avec les nouvelles significations de la négation et de la disjonction, les propositions primitives de *1 tiennent encore. Si cette méthode est adoptée, nous n'avons pas besoin de prendre $(\exists x).\varphi x$ comme idée primitive, nous pouvons poser :*

$$10.01. (\exists x).\varphi x. = . \sim (x). \sim \varphi x \text{ Df}$$

*Afin de rendre clair comment la méthode alternative peut être développée nous ne supposerons, dans ce numéro, rien de ce qui a été prouvé au *9 sauf quelques propositions [essentiellement les propositions *10.1, *10.11, *10.12] qui, dans le méthode alternative, servent de propositions primitives, et (ce qui caractérise en partie la méthode*

alternative) l'applicabilité aux propositions contenant des variables apparentes des analogues des idées primitives et des propositions de *1, et aussi de leurs conséquences établies aux *2-5.

[...]

*10.1. $\vdash \vdash (x).\phi x \supset \phi y$

I.e. ce qui est vrai dans tous les cas est vrai dans n'importe quel cas.

*19.11. Si ϕy est vrai quel que soit l'argument y alors $(x).\phi x$ est vrai.

[...]

Cette proposition est, en un certain sens, la réciproque de *10.1. *10.1 peut être énoncé : « Ce qui est vrai de tous est vrai de chacun », cependant que *10.11 peut être énoncé : « Ce qui est vrai de chacun est vrai de tous ».

*10.12. $\vdash \vdash (x).p \vee \phi x \supset :p \vee (x) \phi x$

[...]

Les propositions de ce numéro sont largement utilisées dans toute la suite de ce livre. Les propositions les plus utilisées sont les suivantes :

[...]

*10.21. $\vdash \vdash (x).p \supset \phi x \equiv p \supset (x).\phi x$

*10.22. $\vdash \vdash (x).\phi x \psi x \equiv : (x).\phi x : (x).\psi x$

*10.23. $\vdash \vdash (x).\phi x \supset p \equiv : (\exists x).\phi x \supset p$

I.e. si ϕx implique toujours p alors si ϕx est vrai quelquefois, p est vrai.

*10.24. $\vdash \vdash \phi y \supset (\exists x).\phi x$

I.e. si ϕy est vrai alors il y a un x pour lequel ϕx est vrai. Ceci est la seule méthode de prouver des théorèmes d'existence.

[...]

*10.27. $\vdash \vdash (z).\phi z \supset \psi z \supset : (z).\phi z \supset (z).\psi z$

I.e. si ϕz implique toujours ψz alors « ϕz toujours » implique « ψz toujours ». Les trois propositions suivantes, qui sont également utiles, sont analogues à *10.27.

*10.271. $\vdash \vdash (z).\phi z \equiv \psi z \supset : (z).\phi z \equiv (z).\psi z$

*10.28. $\vdash \vdash (x).\phi x \supset \psi x \supset : (\exists x).\phi x \supset (\exists x).\psi x$

*10.281. $\vdash \vdash (x).\phi x \equiv \psi x \supset : (\exists x).\phi x \equiv (\exists x).\psi x$

*10.35. $\vdash \vdash (\exists x).\phi x \vee (\exists x).\psi x \equiv (\exists x).\phi x \vee \psi x$

Cette proposition est très fréquemment utilisée. Elle contraste avec *10.5, dans laquelle nous avons seulement une implication et non une équivalence.

*10.5. $\vdash \vdash (\exists x).\phi x \psi x \supset : (\exists x).\phi x : (\exists x).\psi x$

La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse. Le fait que cette proposition énonce une implication, alors que *10.42 énonce une équivalence, est la source de plusieurs différences substantielles entre les formules concernant l'addition logique et les formules concernant la multiplication logique.

*10.51. $\vdash \vdash \sim \{ (\exists x).\phi x \psi x \} \equiv : \phi x \supset_x \sim \psi x$

Cette proposition est analogue à :

$$\vdash \vdash \sim (p.q) \equiv .p \supset \sim q$$

qui résulte de *4.63 par transposition.

Des propositions restantes de ce numéro, quelques-unes sont employées moyennement, cependant que d'autres sont des lemmes qui sont utilisées seulement une fois ou deux, quelquefois dans une étape ultérieure lointaine.

3.2.2.3 Théorie des prédicats polyadiques

Le paragraphe *11 est lui aussi très bien résumé par son introduction :

*Dans ce numéro les propositions prouvées pour une variable dans *10 vont être étendues au cas de deux variables, en ajoutant quelques propositions n'ayant pas d'analogue pour une variable, telles que *11.2.21.23.24 et *11.53.55.6.7. « $\phi(x,y)$ » est une proposition contenant x et y ; quand x et y n'ont pas d'assignation, $\phi(x,y)$ est une fonction propositionnelle de x et y . La définition *11.01 montre que « la vérité de toutes les valeurs de $\phi(x,y)$ » n'a pas besoin d'être prise comme nouvelle idée primitive, mais qu'elle est définissable en termes de « la vérité de toutes les valeurs de ψx ». La raison en est que, quand x a une assignation, $\phi(x,y)$ devient une fonction d'une variable, à savoir y , d'où il suit que, pour chaque valeur possible de x , « $(y).\phi(x,y)$ » renferme simplement l'idée primitive introduite au *9. Mais « $(y).\phi(x,y)$ » est encore une fonction d'une seule variable, à savoir x , puisque y est devenu ici une variable apparente. Ainsi la définition *11.01 ci-dessous est légitime. Nous posons :*

*11.01. $(x,y).\phi(x,y). = : (x) : (y).\phi(x,y)$ Df

*11.02. $(x,y,z).\phi(x,y,z). = : (x) : (y,z).\phi(x,y,z)$ Df

*11.03. $(\exists x,y).\phi(x,y). = : (\exists x) : (\exists y).\phi(x,y)$ Df

*11.04. $(\exists x,y,z).\phi(x,y,z). = : (\exists x) : (\exists y,z).\phi(x,y,z)$ Df

*11.05. $\phi(x,y). \supset_{x,y} .\psi(x,y) := (x,y) : \phi(x,y). \supset .\psi(x,y)$ Df

*11.06. $\phi(x,y). \equiv_{x,y} .\psi(x,y) := (x,y) : \phi(x,y). \equiv .\psi(x,y)$ Df

Toutes les définitions ci-dessus sont supposées étendues à n'importe quel nombre de variables pouvant apparaître.

Les propositions de cette section peuvent être étendues à n'importe quel nombre fini de variables; comme l'analogie est exacte, il n'est pas nécessaire de poursuivre le procédé au-delà de deux variables dans nos preuves.

En plus de la définition *10.01, nous avons besoin de la proposition primitive selon laquelle « quel que puisse être l'argument x , $\phi(x,y)$ est vrai, quel que puisse être l'argument y » implique l'énoncé correspondant avec x et y permutés sauf dans « $\phi(x,y)$ ». Ceci peut être pris comme la signification de « $\phi(x,y)$ est vrai quel que puissent être les arguments x et y ».

Les propositions de ce numéro sont un peu moins utilisées que celles de *10, mais quelques-unes d'entre elles sont fréquemment utilisées. Par exemple les suivantes :

*11.1. $\vdash : (x,y).\phi(x,y). \supset .\phi(z,w)$

*11.11. Si $\phi(z,w)$ est vrai quels que puissent être les arguments z et w alors l'énoncé $(x,y).\phi(x,y)$ est vrai.

Ces deux propositions sont les analogues de *10.1.11.

*11.2. $\vdash : (x,y).\phi(x,y). \equiv .(y,x).\phi(x,y)$

I.e. dire que « pour toutes les valeurs possibles de x , $\phi(x,y)$ est vrai pour toutes les valeurs possibles de y » est équivalent à dire que « pour toutes les valeurs possibles de y , $\phi(x,y)$ est vrai pour toutes les valeurs possibles de x ».

*11.3. $\vdash : .p. \supset .(x,y).\phi(x,y) := : .(x,y) : p. \supset .\phi(x,y)$

Ceci est l'analogue de *10.21.

*11.32. $\vdash : .(x,y).\phi(x,y). \supset .\psi'x,y) \supset : (x,y).\phi(x,y). \supset .(x,y).\psi(x,y)$

I.e. « si $\phi(x,y)$ implique toujours $\psi(x,y)$ alors ' $\phi(x,y)$ toujours' implique ' $\psi(x,y)$ toujours' ». Ceci est l'analogue de *10.27.

*11.33.34.341 sont respectivement les analogues de *10.271.28.281 et sont fréquemment utilisés.

* 11.35. $\vdash : (x, y) : \phi(x, y) \supset p \equiv : (\exists x, y) . \phi(x, y) \supset p$

*I.e. si $\phi(x, y)$ implique toujours p alors si $\phi(x, y)$ est vrai quelquefois, p est vrai, et vice-versa. Ceci est l'analogie de *10.23.*

* 11.45. $\vdash : (\exists x, y) : p . \phi(x, y) \equiv : p : (\exists x, y) . \phi(x, y)$

*Ceci est l'analogie de *10.35.*

* 11.54. $\vdash : (\exists x, y) . \phi(x) . \psi(y) \equiv : (\exists x) . \phi(x) : (\exists y) . \psi y$

Cette proposition est utile parce qu'elle analyse une proposition contenant deux variables apparentes dans deux propositions qui en contiennent chacune une seule. « $\phi x . \psi y$ » est une fonction de deux variables mais est composée de deux fonctions d'une seule variable chacune. Une telle fonction est comme une conique formée de deux lignes droites : elle peut être appelée fonction « analysable ».

* 11.55. $\vdash : (\exists x, y) . \phi(x) . \psi(x, y) \equiv : (\exists x) : \phi(x) : (\exists y) . \psi(x, y)$

I.e. dire qu'« il y a des valeurs de x et y pour lesquelles $\phi(x) . \psi(x, y)$ est vrai » est équivalent à dire qu'« il y a une valeur de x pour laquelle $\phi(x)$ est vrai et pour laquelle il y a une valeur de y telle que $\psi(x, y)$ est vrai ».

* 11.6. $\vdash : (\exists x) : (\exists y) . \phi(x, y) . \psi y : \xi x : . \equiv : (\exists y) : (\exists x) : \phi(x, y) . \xi x : \psi y$

Ceci donne une transformation qui est utile dans beaucoup de preuves.

* 11.62. $\vdash : \phi(x) . \psi(x, y) \supset_{x, y} . \xi(x, y) \equiv : \phi x \supset_x : \psi(x, y) \supset_y . \xi(x, y)$

Cette transformation est également utile.

[WR-10]

Il est curieux que RUSSELL ne retienne pas parmi les propositions importantes les deux propositions suivantes :

* 11.23. $\vdash : (\exists x, y) . \phi(x, y) \equiv : (\exists y, x) . \phi(x, y)$

[...]

* 11.26. $\vdash : (\exists x) : (y) . \phi(x, y) \supset : (y) : (\exists x) . \phi(x, y)$

[...]

Notons que la réciproque de cette proposition est fautive. Par exemple soit $\phi(x, y)$ la fonction propositionnelle « si y est une fraction propre [un rationnel strictement compris entre 0 et 1], alors x est une fraction propre plus grande que y ». Alors pour toutes les valeurs de y nous avons $(\exists x) . \phi(x, y)$, aussi $(y) : (\exists x) . \phi(x, y)$ est satisfait. « $(y) : (\exists x) . \phi(x, y)$ » exprime la proposition : « Si y est une fraction propre, il y a toujours une fraction propre plus grande que y ». Mais « $(\exists x) : (y) . \phi(x, y)$ » exprime la proposition : « il existe une fraction propre qui est plus grande que toute fraction propre », ce qui est faux.

[WR-10]

3.2.3 Amélioration de l'exposé

3.2.3.1 Logique du premier ordre

Dans la logique des prédicats que nous avons vue, les quantificateurs ne portent que sur les variables d'individus et non sur les prédicats. On dit qu'il s'agit de la *logique du premier ordre* pour la distinguer des *logiques d'ordres supérieurs* où les quantificateurs peuvent porter sur les prédicats. Ces dernières logiques n'ont pas d'intérêt pour le fondement des mathématiques, aussi ne les étudierons-nous que plus tard, dans la métamathématique mathématisée.

La séparation de la logique des prédicats en *logique du premier ordre* et *logiques d'ordres supérieurs* est implicite dans la théorie des types de RUSSELL [RUS-06]. La première formulation

explicite de la logique du premier ordre comme un système logique indépendant se trouve dans la première édition des *Principes de la logique théorique* [H-A-28] de HILBERT et ACKERMANN en 1928.

3.2.3.2 Le nom

Pour la logique des prédicats, HILBERT et ACKERMANN [H-A-28] emploient, dans la première édition (1928) le nom *Funktionenkalkül* (calcul fonctionnel). Dans la seconde édition (1938), suivant partiellement le livre de HILBERT et BERNAYS [H-B-34], ils utilisent le nom *Prädikatenkalkül* (calcul des prédicats). Pour eux le mot *prédicat* est appliqué à la même chose que ce que RUSSELL appelle *fonction propositionnelle* et que HILBERT et BERNAYS appellent *fonction logique* ([H-B-34], p. 7, 126 et 190). Cependant CARNAP [CAR-34] réserve le mot *prédicat* à ce qui est appelé par Hilbert et BERNAYS *Prädikatensymbol* (c'est-à-dire formule logique).

3.3 Logique égalitaire

3.3.1 L'exposé actuel

L'origine de la logique égalitaire (du premier ordre) est difficile à déterminer. Elle est déjà implicite en un certain sens dans les travaux de PEIRCE et de SCHRÖDER. Mais l'exposé actuel se trouve plus ou moins dans le premier volume du livre de HILBERT et BERNAYS [H-B-34].

3.3.2 L'identité

3.3.2.1 FREGE

Durant la période booléenne, l'identité est introduite sans définition. La première définition en logique mathématique est due à FREGE.

§8. Nécessité d'un signe pour l'identité de contenu, introduction d'un tel signe.

L'identité de contenu diffère de la conditionnalité et de la négation en ce qu'elle s'applique aux noms et non aux contenus [i.e. au sens et non à la valeur logique]. Alors que dans d'autres contextes les signes sont simplement représentatifs de leur contenu, et que chaque combinaison dans laquelle ils entrent exprime seulement une relation entre leurs contenus respectifs, ils jouent leurs propres rôles lorsqu'ils sont combinés au moyen du signe pour l'identité de contenu ; car celui-ci exprime la circonstance selon laquelle deux noms ont le même contenu. Ainsi l'introduction d'un signe pour l'identité de contenu produit nécessairement une bifurcation dans la signification de tous les signes : ils sont là à la fois pour leur contenu et pour eux-mêmes. À première vue on a l'impression qu'on a à faire simplement à une expression et non à une pensée, que nous n'avons pas besoin de signe pour l'identité de contenu. Pour montrer que ceci est une illusion je prendrai l'exemple géométrique suivant. Supposons que sur la circonférence d'un cercle il y ait un point fixe A sur lequel pivote une droite. Lorsque cette droite passe par le centre du cercle, nous appellerons B l'autre point d'intersection avec le cercle. Le point d'intersection, autre que A, de la droite et de la circonférence sera alors appelé le point B associé à la position de la droite n'importe quand ; ce point est tel qu'à des variations continues dans sa position peut toujours correspondre des variations continues dans la position de la droite. Ainsi le nom B dénote-t-il quelque chose d'indéterminé aussi longtemps que la position correspondante de la droite n'a pas été spécifiée. Nous pouvons maintenant poser la question : quel est le point associé à la droite lorsque celle-ci est perpendiculaire au

diamètre [passant par A] ? La réponse sera : le point A. Ainsi, dans ce cas, le nom B a le même contenu que le nom A ; et nous ne pouvons pas utiliser un seul nom depuis le début, puisque la justification pour cela est donnée seulement par la réponse. Ce point est déterminé de deux façons : (1) immédiatement par l'intuition et (2) comme un point B associé à la droite perpendiculaire au diamètre.

À chacune de ces façons de déterminer le point correspond un nom particulier. Ainsi la nécessité d'un signe pour l'identité de contenu suit de la considération suivante : le même contenu peut être complètement déterminé de différentes façons ; mais que dans un cas particulier deux façons de le déterminer conduise au même résultat est le contenu d'un jugement. Avant que ce jugement puisse être fait, deux noms distincts, correspondants à ces deux façons de déterminer le contenu, doivent être assignés à ce que ces façons déterminent. Le jugement, cependant, requiert pour son expression un signe pour l'identité de contenu, un signe qui connecte ces deux noms. Il suit de ceci que l'existence de différents noms pour le même contenu n'est pas toujours simplement une question de forme ; et même plutôt qu'il y ait de tels noms est le cœur même du fait qu'il y ait plusieurs façons de déterminer le contenu. Dans ce cas le jugement qu'il y ait une identité de contenu est synthétique, dans le sens kantien. Une raison plus extrinsèque de l'introduction d'un signe pour l'identité de contenu est que c'est une façon commode d'introduire une abréviation pour une longue expression. Alors nous pouvons exprimer l'identité de contenu entre l'abréviation et la forme originale.

Maintenant :

$$| - - - - (A \equiv B)$$

signifiera que le signe A et le signe B ont le même contenu conceptuel, c'est-à-dire que nous pouvons partout poser B pour A et *vice-versa*.

[FRE-79]

3.3.2.2 PEIRCE

FREGE conçoit l'identité comme une relation entre deux *noms* et non entre deux *objets*. La définition moderne est donnée par PEIRCE.

Nous pouvons adopter un signe spécial de seconde intention, disons 1, pour exprimer l'identité, et nous pouvons écrire 1_{ij} . Cette relation d'identité a des propriétés particulières. La première est que si i et j sont identiques, ce qui est vrai de i est alors vrai de j . Ceci peut être écrit :

$$\Pi_i \Pi_j \{1_{ij} + \bar{x}_i + x_j\}$$

[...]

L'autre propriété est que si toute chose qui est vraie de i est vraie de j alors i et j sont identiques. Ceci est plus naturellement écrit comme suit : le signe q signifie la relation d'une qualité, d'un caractère, d'un fait, ou prédicat à son sujet. Alors la propriété que nous désirons exprimer est :

$$\Pi_i \Pi_j \Sigma_k (1_{ij} + \bar{q}_{ki} q_{kj}).$$

Et l'identité est définie ainsi :

$$1_{ij} = \Pi_k (q_{ki} q_{kj} + \bar{q}_{ki} \bar{q}_{kj}).$$

C'est-à-dire que deux choses sont identiques, c'est dire que chaque prédicat est vrai à la fois ou faux à la fois. Ceci peut sembler un cercle vicieux que d'introduire l'idée de qualité pour exprimer l'identité; mais cette impression peut être modifiée en réfléchissant à ce que $q_{ki}q_{kj}$ signifie simplement que i et j sont à la fois dans la classe ou collection k . Si nous voulons nous pouvons nous dispenser du signe q , en utilisant l'indice d'un signe et en se référant à celui-ci dans le quantificateur juste comme un indice sous-jacent. C'est-à-dire que nous pouvons écrire :

$$1_{ij} = \Pi_x (x_i x_j + \bar{x}_i \bar{x}_j).$$

[PEI-85]

Ainsi PEIRCE définit l'identité, mais en logique du second ordre.

Appendices

Bibliographie

- [Aristote] ARISTOTE, **De interpretatione**, in **Aristotelis Opera**, éd. E. Bekker, Berlin, 1831, 2 vol. [La pagination de Bekker figure toujours en marge des traductions]. Numérisé par *Internet Archive*.
In **Aristotelis Organon graece**, éd. Th. Waitz, Leipzig, 1844–1846, 2 vol.
Traduction française par Jean Tricot **Organon, II De l'interprétation**, Vrin, 1936 (1959).
- [Ar-Soph.-El.] ARISTOTE, **Les réfutations sophistiques**, traduction française par Jean Tricot, Vrin, 1969, 176 p.
- [BAR-77] BARWISE, J. ed., **Handbook of Mathematical Logic**, XII + 1 166 p., North-Holland, 1977.
- [BER-26] BERNAYS, *Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica*, **Math. Zeitschrift.**, vol. 25, 1926, pp. 305–320.
- [BLA-70] BLANCHÉ, Robert, **La logique et son histoire**, 366 p., A. Colin, 1970, 2^{de} éd. avec Jacques DUBUC, 1996, 384 p.
- [BOO-47] BOOLE, George, **The Mathematical Analysis of Logic**, Macmillan, 1847. Reed. in [BOO-52], pp. 45–124.
Tr. fr. *L'analyse mathématique de la logique*, in F. GILLOT, **Algèbre et logique**, Albert Blanchard, 1962, 125 p.
- [BOO-54] BOOLE, George, **Investigations on The Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities**, MacMillan, Londres, 1854. Réimpression, Dover, 1958.
Tr. fr. par S. B Diagne, **Les lois de la pensée**, Vrin, 1992, 414 p.
- [BOO-52] BOOLE, George, **Collected Logical Works, volume I : Studies in Logic and Probability**, Open Court, 1952.
- [CAR-34] CARNAP, Rudolph, **Logische Syntax der Sprache**, 1934. Augmented Engl. tr. **The logical syntax of language**, Londres, Kegan Paul Trench, Trubner & Co. ; New York, Harcourt, Brace and Co., 1937.
- [COU-05] COUTURAT, Louis, **Les principes des mathématiques**, 1905, réédition Albert Blanchard, 1980, VIII + 311 p. Numérisé par *Google* sur *Internet Archive*.
- [CHU-56] CHURCH, Alonzo, **Introduction to mathematical logic**, vol. 1 (le seul paru),

- Princeton Mathematical series n° 17, Princeton University Press, 1956, X + 378 p.
- [DIA-89] DIAGNE, Bachir, **Boole, l’oiseau de nuit en plein jour**, Belin, 1989, 264 p.
[Donne un résumé en français des biographies qui ont été consacrées à George BOOLE, avec les références et des extraits traduits. L’auteur explique bien pourquoi et comment BOOLE mathématise la logique d’Aristote, dans le contexte de l’école des algébristes de Cambridge (à l’origine des structures algébriques). Par contre il ne détaille pas les apports logiques retenus par la logique contemporaine, et peu d’extraits sont donnés.]
- [Euclide] EUCLIDE, **Les œuvres**, Patris, Paris, 1819, traduction de François Peyrard. Comprend **Les éléments**, **Les données** et **Le premier livre des cinq corps d’Hypsiclès**. II + 627 p. Réédition Blanchard avec une introduction de Jean Itard, 1966.
- [FRE-79] FREGE, Gottlob, **Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formal-sprache des reinen Denkens**, Halle, Nebert, VII + 88 p. 1879; reproduit dans **Begriffsschrift und andere Aufsätze**, Hildesheim, Olms, 1964.
English translation *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, in [VAN-67] pp. 1–82.
Traduction française de l’avant propos et du premier chapitre *Begriffsschrift*, dans [RIV-92], pp. 93–129.
Traductions française complète, **L’idéographie**, Vrin, 1999.
- [FRE-84] FREGE, Gottlob, **Die Grundlagen der Arithmetik**, Breslau, 1884, XIX + 119 p.; 2^{de} éd., Breslau, 1934; 3^{ème} éd. avec tr. angl., New-York, 1950, voir ci-après. Engl. tr. **The Foundations of Arithmetic**, Oxford, Basil Blackwell, 1950.
Traduction française **Les fondements de l’arithmétique**, Seuil, 1969, 234 p. (rééd. s.d. [1978]).
- [FRE-93] FREGE, Gottlob, **Grundgesetze der Arithmetik, vol. 1**, Jena, 1893. Partial eng. tr. in [FRE-52] and in [FRE-67].
- [FRE-96] FREGE, Gottlob, *Lettera del sig. G. Frege all’editore*, 1896, **Revue de mathématiques**, vol. 6, 1898, pp. 53–59; = [PEA-58], pp. 288–294.
- [FRE-97] FREGE, Gottlob, *Ueber die Begriffsschrift der Herrn Peano und meine eigene*, **Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physikalische Klasse**, vol. 48, 1897, pp. 361–378.
- [FRE-03] FREGE, Gottlob, **Grundgesetze der Arithmetik, vol. 2**, Jena, 1893. Partial eng. tr. in [FRE-52] and in [FRE-67].
- [FRE-52] GEACH, P. & BLACK, M., **Translations from philosophical writings of Gottlob Frege**, Basic Blackwell, Oxford, 1st ed. 1952, 3rd ed. 1980, 228 p.
- [FRE-67] FREGE, Gottlob, **The basic Laws of Arithmetic**, University of California Press, 1967, LXIII + 144 p.
- [FRE-71] FREGE, Gootlob, **Écrits logiques et philosophiques**, tr. et introduction de Claude IMBERT, Seuil, 1971, 238 p.

- [FRE-87] FREGE, Gottlob & HUSSERL, Edmund, **Correspondance**, T.E.R., 1987, 88 p.
- [G-F-83] GABBAY, D. et GUENTHNER, F. editors, **Handbook of Philosophical Logic**, Reidel, Dordrecht.
vol. 1 **Elements of Classical Logic**, 1983, XIV + 494 p.
[Logique élémentaire et extensions, et non logique d'Aristote.]
vol. 2 **Extensions of Classical Logic**, 1984, XII + 776 p.
vol. 3 **Alternatives to Classical Logic**.
vol. 4 **Topics in the Philosophy of Language**.
- [H-A-28] HILBERT, David & ACKERMANN, Wilhelm, **Grundzüge der theoretischen Logik**, Springer, 1928, 2^{de} éd. 1938.
Tr. angl. de la 2^{de} éd. **Principles of Mathematical Logic**, Chelsea, 1950, XII + 172 p.
- [H-B-34] HILBERT, David & BERNAYS, Paul, **Grundlagen der Mathematik**, vol. 1, 1934.
Tr. fr. **Fondements des Mathématiques**, L'Harmattan, deux volumes, 607 + 624 p., 2003.
- [HIL-99] HILBERT, David, *Grundlagen der Geometrie*, **Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Dekmals in Göttingen**, 1899. **Grundlagen der Geometrie**, Teubner, 2^{de} éd., Leipzig, 1903, V-175 p., 3^{ème} éd., 1909, VI-279 p., 4^{ème} éd., 1913, 5^{ème} éd., 1922, 6^{ème} éd., 1923, 7^{ème} éd., Berlin, 1930, VIII-378 p., 8^{ème} éd., Stuttgart, 1956, VIII-251 p., 9^{ème} éd., 1962, VIII-271 p., 10^{ème} éd., 1968, VII-271 p.
Tr. fr. enrichie de l'article par LAUGEL, **Les principes fondamentaux de la géométrie**, Gauthier-Villars, 1900, 114 p. Numérisé par *Gallica*.
Tr. fr. **Les fondements de la géométrie**, édition critique de Paul ROSSIER, Dunod, 1971, XV + 311 p.
Tr. angl. de la seconde éd. par E.J. Townsend, **The Foundations of Geometry**, Open Court, 1902. Tr. angl. de la dixième éd., Open Court, 1971.
- [Hérodote] HÉRODOTE, **Livre II : Euterpe**, texte grec établi et traduit par Ph.-E. Legrand, 1936, 182 pages dédoublées.
- [KLE-67] KLEENE, Stephen Cole, **Mathematical Logic**, Wiley, 1967. Tr. fr. de Jean LARGEAULT, **Logique mathématique**, A. Colin, 1971, 414 p., rééd. Gabay, 1988.
[Le nom de l'auteur se prononce *klini*.]
- [KLI-72] KLINE, Morris, **Mathematical thought from Ancient to Modern Times**, Oxford University Press, XVIII + 1238 p., 1972.
- [KLI-80] KLINE, Morris, **Mathematics : the loss of certainty**, Oxford University Press, 1980. Tr. fr. **Mathématiques : la fin des certitudes**, Bourgois, 1989, 664 p.
[Nous avons parlé des onze premiers chapitres dans le texte. Qu'en est-il des quatre derniers? Ce livre n'est pas une histoire des mathématiques mais une brillante exposition d'un système philosophique des mathématiques, le *physicalisme*, qui considère que toutes les mathématiques sont nées pour rendre service à la physique (la théorie des équations différentielles pour la mécanique, l'analyse vectorielle

pour l'électricité, ...), et que seules les mathématiques capables de rendre service à la physique (et de nos jours à l'informatique) sont dignes d'intérêt. Cette thèse est surtout (mais pas exclusivement) développée dans les derniers chapitres. Ce n'est pas le lieu ici de critiquer (ou tout au moins d'atténuer) ce point de vue, mais il vaut mieux que le lecteur soit prévenu, puisque KLINE ne le fait pas.]

- [LEW-13] LEWIS, Clarence Irving, *A new algebra of implications and some consequences*, **The journal of philosophy, psychology and scientific methods**, vol. 10, 1913, pp. 428–438.
- [LEW-18] LEWIS, Clarence Irving, **Survey of symbolic logic**, University of California Press, 1918, 2^{de} éd. sans les chapitres 5 et 6, Dover, 1960, X + 328 p.
- [McC-77] MCCOLL, Hugh, *The calculus of equivalent statements and integration limits*, **Mathematical questions**, vol. 28, 1877, pp. 20–23.
- [McC-78] MCCOLL, Hugh, *The calculus of equivalent statements and integration limits*, **Proceedings of the London Mathematical Society**, vol. 9, 1877–78, pp. 9–20 et 177–186.
- [MIT-83] MITCHELL, O. H., *On a new algebra of logic*, **Stud. in logic by members of the John Hopkins Univ. Boston**, 1883. Rééd. John Benjamins, 1983.
- [MOR-58] DE MORGAN, Augustus, *On the syllogism, n° III, and on logic in general*, **Trans. Cambridge Philos. Soc.**, vol. 10, 1958, pp. 173–230; = [MOR-66].
- [MOR-66] DE MORGAN, Augustus, **On the syllogism and other logical writings**, Routledge and Kegan Paul, 1966.
- [NEU-27] VON NEUMANN, Johann, *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, **Math. Z.**, vol. 26, 1927, pp. 1–26; = **Collected Works**, Pergamon Press, vol. 1, 1961, pp. 320–338.
- [PEA-89] PEANO, Giuseppe, **Arithmetices principia**, Bocca, Turin, 1889; = [PEA-58], pp. 20–55.
Tr. angl. partielle in [VAN-67], pp. 83–97 et complète *The principles of arithmetic, presented by a new method*, in [PEA-73], pp. 101–134.
- [PEA-97] PEANO, Giuseppe, **Formulaire de mathématiques 2, §1 : Logique mathématique**, Turin, 1897.
- [PEA-58] PEANO, Giuseppe, **Opere Scelte**, Edizione cremonese, Rome, vol. 2, 1958.
- [PEA-73] KENNEDY, Hubert C., **Selected works of Giuseppe Peano**, University of Toronto Press, 1973, XI+249 p.
- [PEI-85] PEIRCE, C. S., *On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation*, **The Amer. Journal of Math.**, vol. 7, 1885, pp. 180–202; = **Collected Works**, 1933, t. III, pp. 210–249.
- [POS-21] POST, Emil, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, **American Journal of mathematics**, vol. 43, 1921, pp. 163–185.
Tr. fr. in Jean LARGEAULT, **Logique mathématique – Textes**, Armand Colin, 1972, pp. 29–53.

- [Proclus] PROCLUS DE LYCIE, **In Primum Euclidis Elementarum Librum Commentarii**, éd. Friedlein, p. 65. **Les Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide**, traduit du grec par Paul ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948 ; réimpression Blanchard, Paris.
- [QUI-50] QUINE, Willard Van Ornam, **Methods of Logic**, Holt, Rinehart and Winston, 1950, 1959, 1972. Tr. fr. de la troisième éd. **Méthodes de logique**, Armand Colin, 1972, 296 p.
- [RIV-92] RIVENC, François et DE ROUILHAN, Philippe, **Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850–1914)**, Payot, 1992, 447 p.
- [RUS-02] RUSSELL, Bertrand, *Letter to Frege*, datée du 16 juin 1902, publiée pour la première fois dans [VAN-67] en traduction anglaise. Traduction française dans [RIV-92].
- [RUS-03] RUSSELL, Bertrand, **The principles of mathematics**, Cambridge University Press, 1903 ; 2nd ed. Allen & Unwin, 1937, XXXIX + 534 p. Tr. fr de la première partie et des appendices *Les principes des mathématiques*, dans [RUS-89], pp. 1–200.
- [RUS-06] RUSSELL, Bertrand, *The theory of implication*, **American Journal of mathematics**, vol. 28, 1906, pp. 159–202.
- [RUS-08] RUSSELL, Bertrand, *Mathematical Logic as based on the Theory of Types*, **American Journal of mathematics**, vol. 30, 1908, pp. 222–262 ; = **Logic and Knowledge**, 1956, pp. 57–102.
Tr fr. *La logique mathématique fondée sur la théorie des types* des §§I, III, IV et V dans [RIV-92], p. 309–334.
- [RUS-18] RUSSELL, Bertrand, **Introduction to mathematical philosophy**, 1918.
Première tr. fr. par G. MOREAU **Introduction à la philosophie mathématique**, Payot, 1928 ; deuxième traduction française par François RIVENC, Payot, 1991, 382 p.
- [RUS-73] RUSSELL, Bertrand, **Essays in Analysis**, édité par D. Lackey, Allen et Unwin, 1973.
- [RUS-89] RUSSELL, Bertrand, **Écrits de logique philosophique**, P.U.F., 1989, LV + 458 p.
[Tr. fr. par Jean-Michel ROY de *Principles of Mathematics*, 1ère partie, appendices A et B, *On denoting*, la première introduction des *Principia Mathematica* et *The Philosophy of Logical Atomism*.]
- [SCH-90] SCHRÖDER, Ernst, **Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)**, Leipzig, vol. 1 1890.
Tr. fr. *Leçons sur l'algèbre de la logique* du vol. 1 pp. 245–249 dans [RIV-92], pp. 188–192.
- [SZA-77] SZABO, Arpad, **Le début des mathématiques grecques**, Vrin, 1977.
[Théorie des irrationnelles, théorie des proportions, constitution d'une mathématique systématique-déductive.]
- [SZA-00] SZABO, Arpad, **L'aube des mathématiques grecques**, Vrin, 2000, 368 p.

[Astronomie, musique, irrationalité, le système euclidien.]

- [THA-88] THAYSE et *alii.*, **Approche logique de l'intelligence artificielle**, Dunod, vol. 1, XIV + 386 p., 1988; vol. 2, XX + 428 p., 1989.
- [VAN-67] VAN HEIJENOORT, Jean, **From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879–1931**, Harvard University Press, 1967, (4th printing, 1981, corrected).
- [VER-65] VERNANT, Jean-Pierre, **Mythe et pensée chez les Grecs**, Maspero, 1965; rééd. en poche Éditions La découverte, 428 p., 2005.
- [WR-10] WHITEHEAD, Alfred & RUSSELL, Bertrand, **Principia Mathematica**, Cambridge University Press, vol.1 1914, 2nde éd. 1925, vol.2 1912, vol.3, 1913; Paperback edition to *56, 1962, XLVI+410 p. Version électronique page par page :
<http://www.hti.umich.edu/u/umhistmath/>
Traduction française de l'introduction dans [RUS-89], pp. 221-334.

Index

- Aristote, v, 2
 - analyse des propositions, 35
 - Organon, 2
 - variable, 38
- axiomatique
 - de Hilbert-Ackermann, 30
 - de Russell et Whitehead, 30
- Boole, George, 4
- Chrysippe, 3
- Cicéron, 3
- copule, 35
- De Morgan
 - analyse des propositions, 35
- De Morgan, Augustus, 4
- dialectique, 3
- Frege
 - variable, 38
- Frege, Gottlob, 4
- Hérodote, 1
- Kline, Morris, 3
- logique, v
 - élémentaire, v
 - classique, v
 - mathématique, v
 - moderne, v
 - philosophique, v
 - pour l'intelligence artificielle, v
- loi
 - en géométrie, 2
- métalangage, 22
- Mc Coll, Hugh, 4
- Organon
 - d'Aristote, 2
- Peano, Giuseppe, 4
- physicalisme, 45
- Proclus, 2
- Quine, William Van Ornam, 10
- règle
 - de substitution, 31
 - du détachement, 26
- Schröder, 4
- schéma d'axiomes, 31
- système
 - complet, 34
- Thales, 2