

Chapitre 5

La méthode axiomatique en logique des prédicats

Nous avons vu qu'une argumentation est une phrase de la forme :

$$A, A', \dots, A'' \therefore U$$

où A, A', \dots, A'', U sont des énoncés logiques (voire de formules logiques). Le problème fondamental de la logique élémentaire est de déterminer dans quels cas on peut dire que U se déduit logiquement de A, A', \dots, A'' , c'est-à-dire dans quels cas on a des *argumentations valides*.

Nous avons vu qu'il existe une méthode systématique (celle des tables de vérité) pour déterminer si une argumentation propositionnelle est valide ou non. Malheureusement, non seulement on ne connaît pas de telle méthode pour la logique des prédicats mais, pire que cela, on peut même démontrer, en *métalogique*, c'est-à-dire la réflexion sur la logique élémentaire, qu'il n'en existe pas.

Dans le chapitre sur la détermination intuitive des argumentations valides nous avons vu quelques argumentations valides et quelques argumentations non valides (grâce à la méthode du contre-exemple). Mais, comme à chaque fois qu'on laisse la main à l'intuition de chacun, et qui plus est à un moment donné, soit on applique une règle connue (dégagée au cours des siècles et enseignée à l'école), soit on a des doutes sur la règle *ad hoc* que l'on énonce pour le cas qui nous intéresse.

S'il n'existe pas de méthode systématique pour déterminer si une argumentation est valide, il existe par contre une méthode systématique de présenter la justification qu'une argumentation est valide, c'est-à-dire qu'une fois cette présentation effectuée par quelqu'un (et cela requiert de la créativité) alors tout un chacun peut la vérifier sans faire appel à aucune intuition que ce soit. On parle techniquement de **semi-décidabilité** de la logique des prédicats, par opposition à la décidabilité de la logique propositionnelle. Par contre on ne peut rien dire sur la validité de l'argumentation si personne ne trouve une telle justification ou un contre-exemple.

Cette présentation de la justification de la validité d'une argumentation s'appelle une *démonstration*. On parle alors de **méthode axiomatique** (à la *Frege-Hilbert*).

5.1 Notion intuitive de démonstration en logique des prédicats

Introduction.- Nous avons exhibé, dans le chapitre sur l'évaluation intuitive des argumentations, un certain nombre de *lois logiques* et de *règles d'inférence*. Nous pourrions encore en trouver d'autres, mais notre but n'est pas de les exhiber toutes : cela reviendrait à trouver toutes les argumentations valides, or elles sont en nombre infini. Nous allons voir que, grâce aux lois logiques et aux règles d'inférence que nous avons dégagées dans le chapitre précédent, on peut fournir un très grand nombre d'autres types d'argumentations valides.

Nous avons dégagé un certain nombre (de formes) d'argumentations valides dans le chapitre sur l'évaluation intuitive des argumentations. Montrons que certaines de celles-ci sont des conséquences presque immédiates d'autres au moyen d'une *démonstration* très élémentaire. Nous réfléchissons ensuite sur ce qu'on peut appeler une *démonstration* de façon plus formelle et plus générale.

Notion 1.- Considérons un certain nombre de formules logiques A, A', \dots, A'' , que nous appellerons *hypothèses*. Alors, en utilisant quelques-unes de ces formules, et éventuellement quelques lois logiques, on peut déduire, grâce à une règle d'inférence, une formule U . On peut alors évidemment écrire dans ce cas :

$$A, A', \dots, A'' \vdash U.$$

Ceci nous permet donc d'exhiber un type d'argumentation valide, en général nouveau.

Exemple 1.- Considérons les deux tautologies suivantes :

$$\begin{aligned} P &\rightarrow (P \vee P) \\ (P \vee P) &\rightarrow P \end{aligned}$$

dont il est facile de reconnaître le caractère de tautologie grâce à la méthode systématique des tables de vérité pour la logique propositionnelle, alors on obtient, en utilisant la règle de transitivité de l'implication (à savoir $U \rightarrow V, V \rightarrow W \vdash U \rightarrow W$) :

$$P \rightarrow P$$

c'est-à-dire le principe d'identité.

On peut bien entendu se demander l'intérêt d'obtenir le principe d'identité de cette façon alors qu'il suffit de considérer sa table de vérité pour cela ! Il s'agit juste, ici, d'illustrer ce que nous venons de dire.

Notion 2.- Il n'y a aucune raison de s'arrêter à cette première étape, c'est-à-dire à une déduction en un coup. On peut maintenant considérer que les hypothèses sont A, A', \dots, A'' et U , et de la même façon, on peut déduire une formule U' :

$$A, A', \dots, A'', U \vdash U'.$$

Mais en fait, puisque U' se déduit de A, A', \dots, A'' , on peut tout aussi bien écrire :

$$A, A', \dots, A'' \vdash U'.$$

On a alors une déduction en deux coups.

On peut continuer ainsi de suite pour obtenir des déductions en trois, en quatre, ... coups.

Exemple 2.- Considérons les trois tautologies suivantes :

$$P \rightarrow (P \vee P)$$

$$(P \vee P) \rightarrow P$$

$$((P \vee P) \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow (P \vee P)) \rightarrow (P \rightarrow P))$$

En utilisant les deux dernières tautologies et la règle de *modus ponens*, à savoir $U, U \rightarrow V \vdash V$, on obtient :

$$(P \rightarrow (P \vee P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$$

En utilisant la première tautologie, la conséquence que nous venons d'obtenir et la règle de *modus ponens*, on obtient :

$$P \rightarrow P$$

c'est-à-dire, là encore, le principe d'identité.

5.2 Formalisation de la notion de méthode axiomatique en logique des prédicats

Nous venons de voir la notion intuitive de *démonstration* en logique des prédicats. Donnons-en maintenant une définition formelle (en choisissant un système particulier d'axiomes).

5.2.1 Axiomes de la logique des prédicats

Langage de Hilbert-Bernays.- Les seuls connecteurs logiques qu'utilise cette axiomatique sont la négation (\neg), la disjonction (\vee) et l'implication (\rightarrow). Le seul quantificateur est le quantificateur existentiel (\exists). Les autres connecteurs et le quantificateur universel seront considérés comme des abréviations.

Définition 1.- On appelle **axiome propositionnel** (de la logique des prédicats) toute formule logique de l'une des quatre formes suivantes :

- $(\phi \vee \phi) \rightarrow \phi$,
- $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$,
- $(\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)$,
- $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\zeta \vee \phi) \rightarrow (\zeta \vee \psi))$,

où ϕ, ψ et ζ sont des formules logiques.

Remarques.- 1^o) Les axiomes ne sont pas les formes ci-dessus, ce sont les expressions logiques obtenues en remplaçant dans les formes ci-dessus les metavariables de formules logiques ϕ, ψ et ζ par des formules logiques données qui sont des axiomes. Les formes elles-mêmes sont appelées des **schémas d'axiomes**. On a donc une infinité d'axiomes.

2^o) On reconnaît des lois de la logique propositionnelle bien connues pour les trois premiers (schémas d'axiomes, à savoir l'idempotence de la disjonction, l'expansion et la commutativité de la disjonction. On pourra vérifier que le quatrième est bien une tautologie.

3^o) En fait il existe plusieurs systèmes d'axiomes convenables. Celui que nous avons choisi est le *système de Hilbert-Bernays*.

Avant de passer à l'axiome suivant, le seul axiome de la logique des prédicats qui ne soit pas une tautologie, rappelons une notion importante vue lors de l'étude de la méthode intuitive.

Définition 2.- On appelle **terme substituable** à la variable x dans une formule ϕ tout terme dans lequel n'apparaît aucune occurrence liée de x dans ϕ .

Définition 3.- On appelle **axiome de substitution** toute formule logique de la forme suivante :

$$((t/x)\phi) \rightarrow (\exists x \phi),$$

où ϕ est une formule logique, x une variable et t un terme substituable à x dans ϕ .

Remarque.- Bien qu'on parle d'*axiome de substitution* au singulier pour simplifier, il s'agit évidemment d'un schéma d'axiomes.

Définition 4.- On appelle **axiome logique** (ou **axiome de la logique des prédicats**) l'un quelconque des axiomes propositionnels ou de substitution.

Conséquences de la réduction l'ensemble des connecteurs primitifs.- On a vu qu'on ne considère dans le langage de Hilbert-Bernays que les connecteurs \neg et \vee . Dans ces conditions, le schéma d'axiomes de la première forme, par exemple, devrait être écrit :

$$(\neg(A \vee A)) \vee A.$$

Abréviations.- Cependant, pour plus de clarté, on se permet d'écrire des formules logiques avec d'autres connecteurs, *a priori* ignorés, qui seront considérés comme des abréviations ne faisant pas partie du langage.

Bien entendu $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont les abréviations respectives pour :

$$\neg((\neg A) \vee (\neg B)), (\neg A) \vee B \text{ et } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

5.2.2 Conséquences d'un ensemble de formules logiques

Introduction.- Plutôt que de noter :

$$A_1, \dots, A_m \vdash B,$$

désignons par Γ l'ensemble $\{A_1, \dots, A_m\}$ des formules logiques prises pour hypothèses et notons :

$$\Gamma \vdash B.$$

On dit que B est une **conséquence** de Γ .

Plutôt que de dire dans quels cas on a :

$$\Gamma \vdash B,$$

on va essayer de déterminer l'ensemble des formules logiques B telles que $\Gamma \vdash B$.

Pour cela faisons d'abord les remarques suivantes :

- une expression logique qui est toujours vraie (autrement dit une **tautologie**) est bien sûr intuitivement conséquence de n'importe quel ensemble Γ d'expressions logiques ;
- la notion de tautologie se réfère à la logique propositionnelle (appliquée à la logique des prédicats) ; pour ce qui est de la logique des prédicats proprement dite, toute **loi logique** est bien sûr également intuitivement conséquence de n'importe quel ensemble Γ de formules logiques ;
- tout élément de Γ est bien sûr une conséquence de Γ ;
- si ϕ et $\phi \rightarrow \psi$ sont des conséquences de Γ alors ψ est une conséquence de Γ , d'après la règle intuitive de *modus ponens* ;
- si ϕ et ψ sont des formules logiques, x une variable qui n'est pas libre dans ψ et si $\phi \rightarrow \psi$ est une conséquence de Γ alors $(\exists x \phi) \rightarrow \psi$ est aussi une conséquence de Γ d'après la règle d'introduction du quantificateur existentiel.

Il se trouve qu'on est toujours parvenu à montrer, plus ou moins facilement, que toute conséquence de Γ au sens intuitif est aussi une conséquence en n'utilisant que les cinq propriétés ci-dessus. Ce qui précède nous permet donc d'obtenir une définition formelle de ce qu'est une conséquence d'un ensemble donné de formules logiques.

Qui plus est, on n'a pas besoin de toutes les tautologies (bien que ceci soit auxiliaire puisqu'il existe une méthode systématique pour déterminer si l'expression logique associée à une formule logique est une tautologie) et, cela est beaucoup plus essentiel, on n'a pas besoin de présupposer toutes lois logiques mais uniquement celles d'un seul type (celui que nous avons appelé ci-dessus l'axiome de substitution).

Définition 5.- Si Γ est un ensemble de formules logiques alors on définit l'ensemble de ses **conséquences logiques** de la façon suivante :

- 1^o) Tout axiome logique est une conséquence de Γ ;
- 2^o) Tout élément de Γ est une conséquence de Γ ;
- 3^o) Si ϕ et ψ sont des formules logiques et si ϕ et $\phi \rightarrow \psi$ sont des conséquences de Γ , alors ψ est aussi une conséquence de Γ ;
- 4^o) Si ϕ et ψ sont des formules logiques, x une variable qui n'est pas libre dans ψ et si $\phi \rightarrow \psi$ est une conséquence de Γ alors $(\exists x \phi) \rightarrow \psi$ est aussi une conséquence de Γ ;
- 5^o) Toutes les conséquences de Γ sont obtenues de cette façon.

Notations et vocabulaire.- 1°) Si ϕ est une conséquence de Γ , on note (formellement) :

$$\Gamma \vdash \phi,$$

et on dit que ϕ est un **théorème** de la **théorie** dont les **axiomes propres** sont les éléments de Γ .

2°) Si Γ est l'ensemble vide alors on note simplement :

$$\vdash \phi,$$

et on dit que ϕ est un **théorème logique**.

3°) Si $\Gamma = \{A, A', A'', \dots\}$ alors on note aussi :

$$A, A', A'', \dots \vdash B,$$

au lieu de $\Gamma \vdash B$.

Loi.- (Loi d'induction pour la notion de conséquence en logique des prédicats)

Soient Γ un ensemble de formules logiques et \mathcal{A} un ensemble de formules logiques tel que :

- tous les axiomes de la logique des prédicats appartiennent à \mathcal{A} ;
- tous les éléments de Γ appartiennent à \mathcal{A} ;
- lorsque ϕ et $\phi \rightarrow \psi$ appartiennent à \mathcal{A} alors ψ appartient à \mathcal{A} ;
- lorsque $\phi \rightarrow \psi$ appartient à \mathcal{A} et x est une variable non libre dans ψ , alors $(\exists x \phi) \rightarrow \psi$ appartient à \mathcal{A} .

Alors \mathcal{A} contient toutes les conséquences de Γ .

5.2.3 Notion de démonstration

Exemples de conséquences.- Donnons quelques exemples de conséquences logiques (plus exactement ici de lois logiques) :

(1) $P \rightarrow (P \vee P)$	[A2]
(2) $(P \vee P) \rightarrow P$	[A1]
(3) $((P \vee P) \rightarrow P) \rightarrow ((\neg P \vee (P \vee P)) \rightarrow (\neg P \vee P))$	[A4]
(4) $((P \vee P) \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow (P \vee P)) \rightarrow (P \rightarrow P))$	[Taut.]
(5) $(P \rightarrow (P \vee P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$	[(2), (4) et MP]
(6) $P \rightarrow P$	[(1), (5) et MP]

Commentaire.- On a donc obtenu, par exemple : $\vdash P \rightarrow P$.

Pour cela on a utilisé quelques conséquences intermédiaires, repérées par un numéro et suivies d'un commentaire indiquant comment elles sont obtenues. Un tel discours s'appelle une **démonstration** ou une **preuve**, ici une démonstration du théorème logique $P \rightarrow P$.

On remarquera que le (3) n'est pas indispensable dans la démonstration que nous avons donnée de $P \rightarrow P$, mais rien ne nous oblige à ne donner que ce qui est indispensable.

Les explications.- Les explications sont données sous forme abrégée :

- [A1], [A2], [A3] ou [A4] indiquent un axiome propositionnel.
- [A5] indique un axiome de substitution.
- [Taut.] indique que l'on est en présence d'une tautologie; on laisse au lecteur le soin de le vérifier puisqu'il existe une méthode systématique pour cela.
- [Hypothèse] ou [Hyp.] indique que la formule logique est un élément de Γ .
- Deux numéros et MP indiquent que l'on obtient la conséquence à partir des formules logiques repérées par ces numéros et le troisième cas de la définition ci-dessus; on dit que l'on applique la **règle de modus ponens**.
- Un numéro et règle- \exists indiquent que l'on obtient la conséquence à partir de la formule repérée par ce numéro et la règle d'introduction du quantificateur existentiel.
- [P1], par exemple, indique que l'on applique une conséquence, repérée par P1, déjà établie.

Schéma de démonstration.- Dans ce qui précède on a utilisé une formule logique bien déterminée, à savoir la variable propositionnelle P . Mais, en fait, si on remplace P par n'importe quelle formule logique ϕ , la démonstration est encore valable et on a :

$$\vdash \phi \rightarrow \phi,$$

c'est-à-dire que l'on a aussi, par exemple, $\vdash (P \vee P) \rightarrow (P \vee P)$.

Dans la suite on ne raisonnera pas, en général, sur des formules logiques bien déterminées, mais sur des variables représentant des formules logiques, telles que A , appelées **métavariabes**. On parle alors de **schéma de démonstrations** et de **schéma de théorèmes**.

Problème de la primauté entre l'arithmétique et la logique.- Le but de FREGE était de fonder la logique avant de passer à l'arithmétique or, pour définir ce qu'est une *démonstration*, nous numérotons les lignes et donc nous avons besoin de l'arithmétique (comme le lui a reproché par exemple Henri Poincaré).

N'y a-t-il pas cercle vicieux ?

En fait nous n'avons besoin que de notions très simples de l'arithmétique pour définir proprement la logique, puis on se sert de la logique pour aller plus loin en arithmétique.

5.3 Développement de la logique des prédicats

Nous entendons par *développement de la logique des prédicats* donner quelques méthodes générales de démonstrations, les plus usuelles, et quelques lois logiques, afin de faciliter les démonstrations concrètes.

Nous le faisons pour le système axiomatique particulier de la logique des prédicats que nous venons de donner. C'est analogue pour d'autres systèmes, comme le montre les exercices.

5.3.1 Méthodes de démonstrations

5.3.1.1 Comparaison des théories

Introduction.- On sent bien que le choix des axiomes est un peu arbitraire. Certains théorèmes peuvent devenir des axiomes et *vice versa* alors que la théorie, au sens intuitif, est la même. On est donc conduit à la notion de *théories équivalentes*.

Définition 1.- Une **théorie** est caractérisée par un ensemble d'hypothèses.

Définition 2.- 1°) Une théorie T' (de la logique des prédicats) est dite **plus forte** qu'une théorie T si, et seulement si, tout axiome propre de T est un théorème de T' .

2°) Des théories T et T' sont **équivalentes** si, et seulement si, chacune est plus forte que l'autre.

Exemple.- Soit L la théorie dont l'ensemble des axiomes propres est l'ensemble vide, c'est-à-dire la logique des prédicats. Alors toute théorie logique est plus forte que L .

Métathéorème 1.- (Comparaison des théories)

Si T' est une théorie plus forte que la théorie T et si θ est un théorème de T alors c'est aussi un théorème de T' .

Métadémonstration.- On démontre ce métathéorème **par induction**, en utilisant la loi d'induction pour l'ensemble des conséquences (et donc des théorèmes).

Soient \mathcal{T} l'ensemble des théorèmes de T et \mathcal{T}' l'ensemble des théorèmes de T' . Alors :

- les axiomes de la logique des prédicats appartiennent à \mathcal{T}' ;
- tous les axiomes de T appartiennent à \mathcal{T}' par hypothèse ;
- si on a déduit que ψ appartient à \mathcal{T} du fait que ϕ et $\phi \rightarrow \psi$ appartiennent à \mathcal{T} alors, par hypothèse de récurrence, on sait que ϕ et $\phi \rightarrow \psi$ appartiennent à \mathcal{T}' . Donc, d'après le 3°) de la définition de l'ensemble des conséquences, ψ appartient à \mathcal{T}' .

- si on a déduit que $(\exists x \phi) \rightarrow \psi$ appartient à \mathcal{T} du fait que $\phi \rightarrow \psi$ appartient à \mathcal{T} et que x est une variable non libre dans ψ , alors $\phi \rightarrow \psi$ appartient aussi à \mathcal{T}' , par hypothèse de récurrence, et x est évidemment toujours une variable non libre dans ψ , donc $(\exists x \phi) \rightarrow \psi$ appartient à \mathcal{T}' , d'après le 4°) de la définition de l'ensemble des conséquences.

Ainsi \mathcal{T}' contient toutes les conséquences de T , soit tous les théorèmes de T . CQFD

Conséquences.- 1°) Si T et T' sont des théories équivalentes alors tout théorème de T est un théorème de T' , et *vice versa*. Autrement dit, les théories T et T' ont les mêmes théorèmes.

2°) Si T' est une théorie plus forte que T et si ϕ est un théorème de T alors ϕ est un théorème de T' , d'après le métathéorème ci-dessus. Quand on déduit, par ce procédé, un théorème de T' d'un théorème de T , on dit qu'on **applique** dans T' les résultats de T .

3°) Ainsi tout théorème de la logique des prédicats est théorème de n'importe quelle théorie logique. D'où l'intérêt de connaître les théorèmes logiques.

Commentaires.- 1°) Le métathéorème ci-dessus n'est pas un théorème de la logique des prédicats mais un théorème sur la logique des prédicats, d'où son nom *métathéorème*. On a de même des *métapropositions*, des *métalemmes*, des *métacorollaires*.

2°) De même, on n'utilise pas pour la démontrer une démonstration de logique des prédicats, mais une *métadémonstration*.

5.3.1.2 Théorie contradictoire

Définition 2.- Une théorie T est dite **contradictoire** si, et seulement si, il existe un énoncé θ tel que θ et $\neg\theta$ soient tous les deux des théorèmes de T .

Remarque.- Si T' est une théorie plus forte qu'une théorie T , et si T est contradictoire, alors il en est de même de T' .

En effet si θ et $\neg\theta$ sont des théorèmes de T , alors ce sont aussi des théorèmes de T' , d'après le métathéorème sur la comparaison des théories, d'où le résultat.

Métathéorème 2.- Si T est une théorie contradictoire alors tout énoncé θ est un théorème de cette théorie.

Métadémonstration.- En effet soit θ un énoncé logique tel que θ et $\neg\theta$ soient des théorèmes de T . Soit ϕ une formule logique. Considérons alors la suite ci-dessous de théorèmes de T :

- | | |
|--------------------------------------------------------|------------------|
| (1) θ | [Hyp.] |
| (2) $\neg\theta$ | [Hyp.] |
| (3) $\neg\theta \rightarrow (\neg\theta \vee \phi)$ | [Taut.] |
| (4) $\neg\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \phi)$ | [D2] |
| (5) $\theta \rightarrow \phi$ | [(2), (4) et MP] |
| (6) ϕ | [(1), (5) et MP] |

Ainsi ϕ est un théorème de T . CQFD

Conséquence.- Ceci montre qu'une théorie contradictoire n'est pas intéressante.

5.4 Développement de la logique propositionnelle

Nous allons montrer que les quelques méthodes générales de démonstration que nous avons dégagées lors de l'évaluation intuitive se retrouvent bien dans notre cadre formel.

5.4.1 Transitivité de l'implication

Métaproposition.- Si A, B et C sont des formules logiques alors on a :

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C.$$

Métadémonstration.- En effet il suffit d'exhiber la suite de (méta)théorèmes suivante :

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| (1) $A \rightarrow B$ | [Hyp.] |
| (2) $B \rightarrow C$ | [Hyp.] |
| (3) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee C))$ | [A4] |
| (4) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | [D2] |
| (5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ | [(2), (4) et MP] |
| (6) $A \rightarrow C$ | [(1), (5) et MP]. \diamond |

Utilisation.- Lorsque $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ sont des théorèmes d'une théorie T , alors $A \rightarrow C$ est aussi un théorème, d'après cette métaproposition et celle de A,III,b. On indique ceci en mettant les deux numéros des conséquences utilisées et l'explication « *transitivité de l'implication* ».

5.4.2 Premiers théorèmes de la logique propositionnelle

Proposition 1.- (Principe du tiers-exclu)

$$\vdash \neg A \vee A$$

$$\vdash A \vee \neg A.$$

Démonstration.- (1) $A \rightarrow (A \vee A)$

- | | |
|---------------------------------------------------|------------------|
| (2) $(A \vee A) \rightarrow A$ | [A2] |
| (3) $A \rightarrow A$ | [A1] |
| (4) $\neg A \vee A$ | [(1), (2) et MT] |
| (5) $(\neg A \vee A) \rightarrow (A \vee \neg A)$ | [D2] |
| (6) $A \vee \neg A$ | [A3] |
| | [(4), (5) et MP] |

Les théorèmes annoncés résultent de (4) et de (6). \diamond

Proposition 2.- (Principe de la double négation)

$$\vdash \neg \neg A \rightarrow A$$

$$\vdash A \rightarrow \neg \neg A.$$

Démonstration.- (1) $\neg A \vee \neg \neg A$

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| (2) $A \rightarrow \neg \neg A$ | [P1] |
| (3) $\neg A \rightarrow \neg \neg \neg A$ | [D2] |
| (4) $(\neg A \rightarrow \neg \neg \neg A) \rightarrow ((A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg \neg \neg A))$ | [(2)] |
| (5) $(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg \neg \neg A)$ | [A4] |
| (6) $A \vee \neg \neg \neg A$ | [(3), (4) et MP] |
| | [P1, (5) et MP] |

- (7) $A \vee \neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \vee A$ [A3]
 (8) $\neg\neg A \vee A$ [(6), (7) et MP]
 (9) $\neg\neg A \rightarrow A$ [D2]

Les théorèmes annoncés résultent de (8) et de (2). \diamond

Proposition 3.- (Principe de la contraposition)

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A).$$

- Démonstration.- (1) $B \rightarrow \neg\neg B$ [P2]
 (2) $(B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B))$ [A4]
 (3) $(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B)$ [(1), (2) et MP]
 (4) $(\neg A \vee \neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)$ [A3]
 (5) $(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)$ [(3), (4) et MT]
 (6) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ [D2]. \diamond

Proposition 4.- (Principe de l'identité)

$$\vdash A \rightarrow A.$$

- Démonstration.- (1) $\neg A \vee A$ [P1]
 (2) $A \rightarrow A$ [D2]. \diamond

5.4.3 Méthode de l'hypothèse auxiliaire

Métathéorème 3.- (Métathéorème de déduction pour la logique des prédicats)

Soient Γ un ensemble de formules logiques, ϕ un énoncé et ψ une formule logique. Alors on a :

$$\Gamma, \phi \vdash \psi$$

si, et seulement si, on a :

$$\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi.$$

Métadémonstration.- Condition suffisante : si on a $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ alors on a $\Gamma, \phi \vdash \psi$. En effet, si on a $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ alors on a aussi $\Gamma, \phi \vdash \phi \rightarrow \psi$ d'après la métaproposition sur une théorie plus forte qu'une autre. Puisque $\Gamma, \phi \vdash \phi$ alors on a, par *modus ponens*, $\Gamma, \phi \vdash \psi$.

Condition nécessaire : si on a $\Gamma, \phi \vdash \psi$ alors on a $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$. Soit \mathcal{A} l'ensemble des formules logiques ψ telles que $\phi \rightarrow \psi$ soit un théorème de Γ . Il suffit de montrer que \mathcal{A} contient toutes les conséquences de $\Gamma \cup \{\phi\}$, en utilisant la loi d'induction pour l'ensemble des conséquences de Γ .

- Si ψ est un axiome de la logique des prédicats ou un élément de Γ alors on a la démonstration suivante de $\phi \rightarrow \psi$ dans Γ :

- | | | |
|-----|--------------------------------------------|----------------------------------|
| (1) | ψ | [axiome ou élément de Γ] |
| (2) | $\psi \rightarrow (\neg\phi \vee \psi)$ | [A2] |
| (3) | $\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ | [D2] |
| (4) | $\phi \rightarrow \psi$ | [(1), (3) et MP] |

- Si ψ et $\psi \rightarrow \zeta$ appartiennent à \mathcal{A} alors on a la démonstration suivante de $\phi \rightarrow \zeta$ appartient à \mathcal{A} :

- | | | |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| (1) | $\phi \rightarrow \psi$ | [ψ appartient à \mathcal{A}] |
| (2) | $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \zeta)$ | [$\psi \rightarrow \zeta$ appartient à \mathcal{A}] |
| (3) | $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\phi)$ | [P2] |
| (4) | $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$ | [(1), (3) et MP] |
| (5) | $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\zeta \vee \neg\psi) \rightarrow (\zeta \vee \neg\phi))$ | [A4] |
| (6) | $(\zeta \vee \neg\psi) \rightarrow (\zeta \vee \neg\phi)$ | [(4), (5) et MP] |
| (7) | $(\neg\psi \vee \zeta) \rightarrow (\zeta \vee \neg\psi)$ | [A3] |
| (8) | $(\neg\psi \vee \zeta) \rightarrow (\zeta \vee \neg\phi)$ | [(7), (6) et transitivité de \rightarrow] |
| (9) | $(\zeta \vee \neg\phi) \rightarrow (\neg\phi \vee \zeta)$ | [A3] |
| (10) | $(\neg\psi \vee \zeta) \rightarrow (\neg\phi \vee \zeta)$ | [(8), (9) et transitivité de \rightarrow] |
| (11) | $(\phi \rightarrow \zeta) \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta)$ | [D2] |
| (12) | $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta)$ | [(2), (11) et transitivité de \rightarrow] |
| (13) | $\neg\phi \vee (\phi \rightarrow \zeta)$ | [D2] |
| (14) | $(\neg\phi \vee (\phi \rightarrow \zeta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \zeta) \vee \neg\phi)$ | [A3] |
| (15) | $(\phi \rightarrow \zeta) \vee \neg\phi$ | [(13), (14) et MP] |
| (16) | $\neg\phi \rightarrow (\neg\phi \vee \zeta)$ | [A2] |
| (17) | $\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta)$ | [D2] |
| (18) | $(\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta)) \rightarrow (((\phi \rightarrow \zeta) \vee \neg\phi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \zeta) \vee (\phi \rightarrow \zeta)))$ | [A4] |
| (19) | $((\phi \rightarrow \zeta) \vee \neg\phi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \zeta) \vee (\phi \rightarrow \zeta))$ | [(17), (18) et MP] |
| (20) | $(\phi \rightarrow \zeta) \vee (\phi \rightarrow \zeta)$ | [(15), (19) et MP] |
| (21) | $\phi \rightarrow \zeta$ | [A1 et MP]. \diamond |

- Si $\psi \rightarrow \zeta$ appartient à \mathcal{A} et si x est une variable non libre dans ζ alors on a la démonstration suivante du fait que $\phi \rightarrow (\exists x \psi) \rightarrow \zeta$ appartient à \mathcal{A} :

- | | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| (1) | $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \zeta)$ | [$\psi \rightarrow \zeta$ appartient à \mathcal{A}] |
| (2) | $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \zeta) \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta))$ | [théorème de logique propositionnelle] |

- (3) $\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta)$ [(1), (2) et MP]
 (4) $(\exists x \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta)$ [(3) et règle- \exists , car x n'est variable libre ni dans ϕ ni dans ζ ,
 par hypothèse pour la seconde formule et parce que ϕ est un énoncé]
 (5) $((\exists x \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta)) \rightarrow (\phi \rightarrow \zeta) \rightarrow (\phi \rightarrow ((\exists x \psi) \rightarrow \zeta))$ [logique propositionnelle]
 (6) $\phi \rightarrow ((\exists x \psi) \rightarrow \zeta)$ [(4), (5) et MP]. \diamond

Remarque.- Nous avons énoncé ici le métathéorème de déduction avec ϕ énoncé (et non une formule quelconque). Nous verrons un peu plus loin que le métathéorème reste vrai même si ϕ est une formule.

Commentaire.- En pratique on indique que l'on va employer ce métathéorème par une phrase du genre suivant : « supposons que ϕ soit vraie ». Cette phrase signifie que l'on va raisonner pour un moment dans la théorie T' obtenue à partir de T en lui adjoignant le nouvel axiome propre ϕ . On reste dans T' jusqu'à ce que l'on y ait démontré la formule ψ . Ceci fait, il est établi que $\phi \rightarrow \psi$ est un théorème de T , et on continue (s'il y a lieu) à raisonner dans T sans indiquer explicitement en général qu'on abandonne la théorie auxiliaire T' .

La formule ϕ que l'on a introduit comme nouvel axiome s'appelle l'**hypothèse auxiliaire**. On parle de **méthode de l'hypothèse auxiliaire**.

5.4.4 Méthode de réduction à l'absurde

Métathéorème.- Soient T une théorie, A une formule logique et T' la théorie obtenue en adjoignant l'axiome propre $\neg A$ aux axiomes propres de T . Si T' est contradictoire alors A est un théorème de T .

Métadémonstration.- En effet, A est alors un théorème de T' , d'après la métaproposition sur les théories contradictoires. Par suite, d'après la méthode de l'hypothèse auxiliaire, $\neg A \rightarrow A$ est un théorème de T . On a alors la démonstration suivante de A dans T :

- (1) $\neg A \rightarrow A$ [voir ci-dessus]
 (2) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee A))$ [A4]
 (3) $(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee A)$ [(1), (2) et MP]
 (4) $A \vee \neg A$ [P1]
 (5) $A \vee A$ [(3), (4) et MP]
 (6) $(A \vee A) \rightarrow A$ [A1]
 (7) A [(5), (6) et MP]. \diamond

Commentaire.- En pratique on indique qu'on va employer ce métathéorème par une phrase du genre suivant : « Supposons que A soit fausse ». Cette phrase signifie qu'on va raisonner pour un moment dans la théorie T' obtenue à partir de T en lui adjoignant le nouvel axiome propre $\neg A$. On reste dans T' jusqu'à ce que l'on ait établi deux théorèmes de la forme B et $\neg B$. Ceci fait, il est établi que A est un théorème de T , ce que l'on indique en général par une phrase du genre suivant : « Or ceci [à savoir, avec les notations précédentes, que B et $\neg B$ sont des théorèmes] est absurde; donc A est vrai ». On revient alors à la théorie T dont on s'occupait précédemment.

5.4.5 Méthode de disjonction des cas

Proposition 5.- $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash C$.

Démonstration.-

(1) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C))$	[A4]
(2) $B \rightarrow C$	[Hyp.]
(3) $(A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$	[((1), (2) et MP]
(4) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee C))$	[A4]
(5) $A \rightarrow C$	[Hyp.]
(6) $(C \vee A) \rightarrow (C \vee C)$	[(4), (5) et MP]
(7) $(A \vee C) \rightarrow (C \vee A)$	[A2]
(8) $(A \vee B) \rightarrow (C \vee C)$	[(3), (7), (6) et MT]
(9) $A \vee B$	[Hyp.]
(10) $C \vee C$	[(9), (8) et MP]
(11) $(C \vee C) \rightarrow C$	[A1]
(12) C	[(10), (11) et MP]. \diamond

Commentaire.- Pour démontrer C , il suffit donc, d'après la proposition précédente et la méthode de l'hypothèse auxiliaire, quand on dispose d'un théorème de la forme $A \vee B$, de démontrer C en adjoignant A aux axiomes propres de T , puis de démontrer C en adjoignant B aux axiomes propres de T .

Cas particulier.- D'après le principe du tiers exclu (P1), si $A \rightarrow C$ et $\neg A \rightarrow C$ sont tous deux des théorèmes de T , alors C est aussi un théorème de T .

5.4.6 Règles d'élimination et d'introduction de la conjonction

Proposition 6.- (Règles d'élimination de la conjonction)

$$\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$$

$$\vdash (A \wedge B) \rightarrow B.$$

Démonstration.- Démontrons, par exemple, $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$.

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| (1) $\neg A \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ | [A2] |
| (2) $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ | [Double négation] |
| (3) $\neg A \rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ | [(1), (2) et MP] |
| (4) $\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$ | [D1] |
| (5) $(\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)) \rightarrow (\neg\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg\neg A)$ | [Contraposition] |
| (6) $(\neg\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg\neg A)$ | [(4), (5) et MP] |
| (7) $(A \wedge B) \rightarrow A$ | [Double négation]. \diamond |

Proposition 7.- (Règles d'introduction de la conjonction)

$$A, B \vdash A \wedge B.$$

Démonstration.- Par l'absurde. Supposons $\neg(A \wedge B)$, on obtient alors le théorème B :

- | | |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------|
| (1) $\neg(A \wedge B)$ | [Hyp.] |
| (2) $\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ | [D1] |
| (3) $\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ | [Double négation] |
| (4) $\neg A \vee \neg B$ | [(2), (3) et MP] |
| (5) $A \rightarrow \neg B$ | [D2] |
| (6) A | [Hyp.] |
| (7) $\neg B$ | [(5), (6) et MP] |

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse B , donc $A \wedge B$ est un théorème de $\{A, B\}$. \diamond

Application 1.- La formule $A \wedge B \wedge \dots \wedge C$ (c'est-à-dire $((A \wedge B) \wedge \dots \wedge C)$) est un théorème d'une théorie T si, et seulement si, chacune des formules A, B, \dots, C est un théorème de T .

Remarque.- Ceci nous permet bien de retrouver le sens intuitif de la conjonction.

Application 2.- Il résulte de l'étude de la conjonction et de la définition de l'équivalence que, pour démontrer dans une théorie T un théorème de la forme $A \leftrightarrow B$, il faut, et il suffit, qu'on puisse démontrer $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$ dans T . Cela se fait souvent en démontrant B dans la théorie obtenue à partir de T par adjonction de l'axiome A , puis en démontrant A dans la théorie obtenue à partir de T par adjonction de l'axiome B .

5.4.7 Métarègle d'équivalence (ou de substitution)

Définition.- Soient $\gamma(P)$ une expression propositionnelle, avec P une variable propositionnelle, et A une formule logique. On note alors $\gamma(A)$ la formule logique obtenue à partir de $\gamma(P)$ dans laquelle toute occurrence de P est remplacée par A . On dit que l'on a **substitué** A à P dans γ .

Remarque.- Cette définition, bien que compréhensible sans problèmes, n'est pas une définition formelle mais une définition intuitive.

Exemple.- Si $\gamma(P)$ est l'expression logique $(P \vee Q) \rightarrow R$, alors :

- $\gamma(S \vee T)$ est l'expression logique $((S \vee T) \vee Q) \rightarrow R$;
- $\gamma(\neg P \wedge S)$ est l'expression logique $((\neg P \wedge S) \vee Q) \rightarrow R$.

Métathéorème.- Soient $\gamma(P)$ une expression logique, A et B des formules logiques telles que $A \leftrightarrow B$ soit un théorème d'une théorie T . Alors $\gamma(A) \leftrightarrow \gamma(B)$ est aussi un théorème de T .

Métadémonstration.- Soit \mathcal{A} l'ensemble des expressions logiques $\gamma(P)$ telles que si $A \leftrightarrow B$ est un théorème d'une théorie T alors $\gamma(A) \leftrightarrow \gamma(B)$ est aussi un théorème de T . Montrons que \mathcal{A} est l'ensemble des expressions logiques, en utilisant pour cela la loi d'induction sur les expressions logiques.

- Si $\gamma(P) = P$ alors le résultat résulte immédiatement de l'hypothèse.
- Si $\gamma(P) = Q$, avec Q variable propositionnelle autre que P , alors $\gamma(A)$ et $\gamma(B)$ sont égales toutes les deux à Q , donc on a bien $\gamma(A) \leftrightarrow \gamma(B)$ d'après le principe de l'identité.

- Si $\gamma(P) = \neg\beta(P)$, avec β élément de \mathcal{A} , alors on a :

- | | |
|-------------------------------------------------|-----------------------|
| (1) $\beta(A) \rightarrow \beta(B)$ | [Hyp., D3 et P6] |
| (2) $\beta(B) \rightarrow \beta(A)$ | [Hyp., D3 et P6] |
| (3) $\neg\beta(B) \rightarrow \neg\beta(A)$ | [(1), P3 et MP] |
| (4) $\neg\beta(A) \rightarrow \neg\beta(B)$ | [(1), P3 et MP] |
| (5) $\neg\beta(A) \leftrightarrow \neg\beta(B)$ | [(3), (4), P7 et D3]. |

- Si $\gamma(P) = \alpha(P) \vee \beta(P)$, avec α et β éléments de \mathcal{A} , alors on a :

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| (1) $\beta(A) \rightarrow \beta(B)$ | [Hyp., D3 et P6] |
| (2) $\alpha(A) \rightarrow \alpha(B)$ | [Hyp., D3 et P6] |
| (3) $(\beta(A) \rightarrow \beta(B)) \rightarrow ((\alpha(A) \vee \alpha(A)) \rightarrow (\alpha(A) \vee \beta(B)))$ | [A4] |
| (4) $(\alpha(A) \vee \beta(A)) \rightarrow (\alpha(A) \vee \beta(B))$ | [(1), (3) et MP] |
| (5) $(\alpha(A) \rightarrow \alpha(B)) \rightarrow ((\beta(B) \vee \alpha(A)) \rightarrow (\beta(B) \vee \alpha(B)))$ | [A4] |
| (6) $(\beta(B) \vee \alpha(A)) \rightarrow (\beta(B) \vee \alpha(B))$ | [(2), (5) et MP] |
| (7) $(\alpha(A) \vee \beta(B)) \rightarrow (\alpha(B) \vee \beta(B))$ | [(6), A3 et MT] |
| (8) $(\alpha(A) \vee \beta(A)) \rightarrow (\alpha(B) \vee \beta(B))$ | [(4), (7) et MT] |

On démontrerait de même $\gamma(B) \rightarrow \gamma(A)$, d'où le résultat d'après P7 et D3. \diamond

Application.- Le plus souvent ce n'est pas, bien sûr, le résultat $\gamma(A) \leftrightarrow \gamma(B)$ que l'on applique, mais le fait que $\gamma(A) \rightarrow \gamma(B)$ est un théorème de T , résultat qui s'en déduit d'après P6. Cependant, même pour ce résultat, il faut l'hypothèse $A \leftrightarrow B$.

5.4.8 Propriétés de l'équivalence

La métarègle de l'équivalence montre l'intérêt des propositions suivantes.

Proposition 8.- (Symétrie de l'équivalence)

$$A \leftrightarrow B \vdash B \leftrightarrow A.$$

Démonstration.- Si on a $A \leftrightarrow B$ alors on a $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$,
soit $B \rightarrow A$ et $A \rightarrow B$,
donc $B \leftrightarrow A$. \diamond

Proposition 9.- (Transitivité de l'équivalence)

$$A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C.$$

Démonstration.- Si on a $A \leftrightarrow B$ et $B \leftrightarrow C$ alors on a $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$,
d'où, par transitivité de l'implication, $A \rightarrow C$.
De même on a $C \rightarrow A$.
Donc $A \leftrightarrow C$. \diamond

Proposition 10.- (Règle de contraposition)

$$A \leftrightarrow B \vdash \neg A \leftrightarrow \neg B.$$

Démonstration.- On a : $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$,
d'où aussi : $\neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$,
soit : $\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B$,
d'après le principe de contraposition et la règle d'équivalence. D'où le résultat. \diamond

5.4.9 Principales équivalences

Au vu de la règle d'équivalence il est intéressant de connaître des exemples d'expressions logiques équivalentes. C'est ce que l'on va rechercher maintenant.

5.4.9.1 Négation

Proposition 11.- (Double négation, ou idempotence de la négation)

$$\vdash A \leftrightarrow \neg\neg A.$$

Démonstration.- Ceci résulte immédiatement du principe de la double négation et de la règle d'introduction de la conjonction. \diamond

5.4.9.2 Disjonction

Proposition 12.- (Commutativité de la disjonction)

$$\vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A).$$

Démonstration.- Ceci résulte de A3 et de la règle d'introduction de la conjonction. \diamond

Proposition 13.- (Associativité de la disjonction)

$$\vdash (A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C).$$

Démonstration.- Elle est un peu longue :

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| (1) $C \rightarrow (C \vee A)$ | [A2] |
| (2) $(C \vee A) \rightarrow (A \vee C)$ | [A3] |
| (3) $C \rightarrow (A \vee C)$ | [(1), (2) et transitivité de l'implication] |
| (4) $(B \vee C) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$ | [(3), A4 et MP] |
| (5) $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \vee (A \vee C)))$ | [(4), A4 et MP] |
| (6) $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$ | [(5), A3 et transitivité de l'implication] |
| (7) $(A \vee C) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$ | [comme (3)] |
| (8) $A \rightarrow B \vee (A \vee C)$ | [A2, (7) et transitivité de l'implication] |
| (9) $((B \vee (A \vee C)) \vee A) \rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \rightarrow (B \vee (A \vee C)))$ | [(8), A4 et MP] |
| (10) $((B \vee (A \vee C)) \vee A) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$ | [(9), A1 et transitivité de l'implication] |
| (11) $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow ((A \vee B) \vee C)$ | [(6), (10) et transitivité de l'implication] |
| (12) $(B \vee C) \rightarrow (C \vee B)$ | [A3] |
| (13) $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow (A \vee (C \vee B))$ | [A4, (12) et MP] |
| (14) $(A \vee (C \vee B)) \rightarrow (C \vee (A \vee B))$ | [(11)] |
| (15) $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow (C \vee (A \vee B))$ | [(13), (14) et transitivité de l'implication] |
| (16) $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow ((A \vee B) \vee C)$ | [(15), A2 et transitivité de l'implication] |
| (17) $(C \vee (B \vee A)) \rightarrow ((C \vee B) \vee A)$ | [(16)] |
| (18) $((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$ | [(17) et commutativité de la disjonction] |
| (19) $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ | [(16), (18) et introduction de la disjonction]. \diamond |

Proposition 14.- (Idempotence de la disjonction)

$$\vdash (A \vee A) \leftrightarrow A.$$

Démonstration.- (1) $(A \vee A) \rightarrow A$

- | | |
|--------------------------------------------------------------------|------------------|
| (2) $A \rightarrow (A \vee A)$ | [A1] |
| (3) $((A \vee A) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (A \vee A))$ | [A2] |
| (4) $(A \vee A) \leftrightarrow A$ | [(1), (2) et P7] |
| | [D4]. \diamond |

5.4.9.3 Disjonction et conjonction

Proposition 15.- (Lois de de Morgan)

$$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B),$$

$$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B).$$

<u>Démonstration.</u> - (1) $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	[P4 et D1]
(2) $\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$	[P3]
(3) $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$	[(1), (2) et transitivité de l'implication]
(4) $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	[P3]
(5) $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$	[(4) et D1]
(6) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	[(3), (5) et P7]
(7) $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B)$	[P4, P3 et MT6]
(8) $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	[(7) et D1]
(9) $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	[P4]
(10) $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B)$	[(9) et D1]
(11) $\neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$	[P3, P4 et MT6]
(12) $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$	[(10), (11) et transitivité de l'implication]
(13) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	[(8), (12) et P7]

Les résultats sont obtenus en (6) et en (13). \diamond

Proposition 16.- (Distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction)

$$\vdash (A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)).$$

Démonstration.- 1^o) Démontrons : $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

Supposons pour cela $(A \wedge (B \vee C))$ et montrons $((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

De $A \wedge (B \vee C)$, on déduit A et $B \vee C$ d'après la règle d'élimination de la conjonction.

Supposons B , alors on a $A \wedge B$, puisqu'on a déjà A , d'où $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ par expansion (A2). Ainsi, en supposant A , on a :

$$B \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)).$$

De même : $C \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

Donc, par disjonction des cas, puisque l'on a $B \vee C$, on a $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Donc : $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

2^o) Démontrons $\vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \leftrightarrow (A \wedge (B \vee C))$.

De $A \wedge B$ on déduit A et B , soit A et $(B \vee C)$ (par expansion), d'où $A \wedge (B \vee C)$, soit :

$$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge (B \vee C)).$$

De même : $\vdash (A \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$.

D'où $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \leftrightarrow (A \wedge (B \vee C))$, et le résultat. \diamond

Proposition 17.- (Distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction)

$$\vdash (A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)).$$

Démonstration.- On applique P15 pour obtenir :

$$(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)) \leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)),$$

d'où on déduit :

$$\neg(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)) \leftrightarrow \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)),$$

soit, d'après les lois de de Morgan :

$$(\neg\neg A \vee \neg(\neg B \vee \neg C)) \leftrightarrow (\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg C)),$$

soit encore :

$$(\neg\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg\neg C)) \leftrightarrow ((\neg\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg\neg A \vee \neg\neg C)),$$

d'où, d'après les principes de double négation et de substitution :

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)). \diamond$$

5.4.9.4 Propriétés de la conjonction

Proposition 18.- (Commutativité de la conjonction)

$$\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A).$$

Démonstration.- (1) $(\neg B \vee \neg A) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

$$(2) \neg(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(\neg B \vee \neg A)$$

$$(3) (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

[A3]

[(1), P4 et MP]

[D1]. \diamond

Proposition 19.- (Associativité de la conjonction)

$$\vdash (A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C).$$

Démonstration.- Démontrons l'une des implications, l'autre se démontre de façon analogue :

$$(1) (\neg A \vee (\neg B \vee \neg C)) \rightarrow ((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C)$$

[Associativité de \vee]

$$(2) \neg((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C) \rightarrow \neg(\neg A \vee (\neg B \vee \neg C))$$

[(1), P4 et MP]

$$(3) \neg(\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg C) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg\neg(\neg B \vee \neg C))$$

[P3, (2) et MP6]

$$(4) (\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge \neg(\neg B \vee \neg C))$$

[(3) et D1]

$$(5) (A \wedge (B \wedge C)) \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

[(4) et D1]. \diamond

Proposition 20.- (Idempotence de la conjonction)

$$\vdash (A \wedge A) \leftrightarrow A.$$

Démonstration.- Ceci résulte immédiatement de ce que : $A \vdash (A \wedge A)$, et : $A \wedge A \vdash A$. \diamond

5.5 Le quantificateur universel

L'axiomatique donnée privilégie le quantificateur existentiel, du fait même du choix du langage retenu, puisque le quantificateur universel n'apparaît que comme une abréviation. Mais on sait, d'après l'étude intuitive, que les deux quantificateurs jouent des rôles duaux. Voyons donc ce qu'il en est, pour le quantificateur universel, de l'analogie des propriétés énoncées à propos du quantificateur existentiel.

Métathéorème 1.- (Règle d'introduction du quantificateur universel, ou règle- \forall)

Si ϕ et ψ sont des formules logiques telles que la variable x n'est pas libre dans ϕ , alors on a :

$$\phi \rightarrow \psi \vdash \phi \rightarrow \forall x \psi.$$

Démonstration.- (1) $\phi \rightarrow \psi$

[Hypothèse]

(2) $(\neg\psi) \rightarrow (\neg\phi)$

[Contraposition]

(3) $(\exists x \neg\psi) \rightarrow (\neg\phi)$

[(2) et règle- \exists]

(4) $(\neg\neg\phi) \rightarrow (\neg\exists x \neg\psi)$

[Contraposition]

(5) $\phi \rightarrow (\neg\neg\phi)$

[Double-négation]

(6) $\phi \rightarrow (\neg\exists x \neg\psi)$

[(5), (4) et transitivité de l'implication]

(7) $\phi \rightarrow (\forall x \psi)$

[Définition de \forall]. \diamond

Métathéorème 2.- (Particularisation)

Si ϕ est une formule logique, x une variable et t un terme substituable à x dans ϕ , alors on a :

$$\vdash (\forall x \phi) \rightarrow ((t/x)\phi).$$

Démonstration.- (1) $(\neg(t/x)\phi) \rightarrow (\exists x \neg\phi)$

[Axiome de substitution]

(2) $(\neg\exists x \neg\phi) \rightarrow (\neg\neg(t/x)\phi)$

[Contraposition]

(3) $(\neg\neg(t/x)\phi) \rightarrow ((t/x)\phi)$

[Double-négation]

(4) $(\neg\exists x \neg\phi) \rightarrow ((t/x)\phi)$

[(2), (3) et transitivité de l'implication]

(5) $(\forall x \phi) \rightarrow ((t/x)\phi)$

[Définition de \forall]. \diamond

Métathéorème 3.- (Règle de généralisation, ou Gen)

Si ϕ est une formule logique et x une variable alors on a :

$$\phi \vdash (\forall x \phi).$$

Démonstration.- (1) ϕ

[Hypothèse]

(2) $\neg(\forall x \phi) \rightarrow \phi$

[(1) et logique propositionnelle]

(3) $\neg(\forall x \phi) \rightarrow (\forall\phi)$

[(2) et règle- \forall]

(4) $\forall x \phi$

[(3) et logique propositionnelle]

Remarquons que la variable x n'est pas libre dans $\neg(\forall x \phi)$ et que l'on peut donc bien appliquer la règle- \forall au (3). \diamond

Remarque.- Nous avons vu qu'une proposition est une phrase prenant la valeur vrai ou faux. On pourrait donc penser qu'un théorème est une forme de propositions vraies (c'est-à-dire que l'on obtient une proposition vraie lorsqu'on interprète les symboles). Pourtant une formule qui n'est pas un énoncé n'est pas une forme de propositions mais de prédicat (complexe).

Cependant soit ϕ une formule ayant les variables libres x, x', \dots, x'' alors nous venons de voir que ϕ est un théorème si, et seulement si, l'énoncé $\forall x, \forall x', \dots, \forall x'' \phi$ en est un.

Définition 1.- La **clôture universelle** d'une formule ϕ ayant pour variables libres x, x', \dots, x'' est l'énoncé $\forall x, \forall x', \dots, \forall x'' \phi$.

Conséquence.- On n'a pas besoin de supposer que ϕ est un énoncé dans le métathéorème de déduction.

5.5.0.1 Méthode de la constante auxiliaire

Métathéorème.- Soient T une théorie, ϕ et ψ des formules, x une variable non libre dans ψ et T' la théorie obtenue en adjoignant ϕ aux axiomes propres de T . S'il existe un terme t tel que $(t/x)\phi$ soit un théorème de T et que ψ est un théorème de T' alors ψ est un théorème de T .

Métadémonstration.- On a $T, \phi \vdash \psi$, donc $T \vdash \phi \rightarrow \psi$ d'après le métathéorème de déduction. D'après les métathéorèmes précédents on a donc $T \vdash (t/x)(\phi \rightarrow \psi)$. Or la variable x n'est pas libre dans ψ , d'où $(t/x)(\phi \rightarrow \psi)$ est égal à $((t/x)\phi) \rightarrow \psi$. Or $(t/x)\phi$ est un théorème de T , donc ψ en est également un. CQFD

Commentaires.- 1^o) Intuitivement, la méthode consiste à utiliser, pour démontrer ψ , un objet arbitraire x (appelé la **constante auxiliaire**), qu'on suppose doué de certaines propriétés qui sont exprimées par ϕ . Pour qu'on puisse se servir, au cours d'une démonstration, d'un objet doué de certaines propriétés, il faut évidemment qu'il existe de tels objets. Le théorème $(t/x)\phi$, appelé **théorème de légitimation**, garantit cette existence.

2^o) En pratique, on indique qu'on va utiliser cette méthode par une phrase du genre : « Soit x un objet tel que ϕ . »

3^o) Contrairement à ce qui se passe dans la méthode de l'hypothèse auxiliaire, la conclusion du raisonnement ne concerne pas x .

5.5.1 Équivalences usuelles

La règle d'équivalence fait qu'il est intéressant de rechercher des équivalences logiques, comme en logique propositionnelle.

5.5.1.1 Règles de dualité

Proposition 1.- (Règles de dualité, ou de de Morgan)

- 1°) $\vdash (\exists x \phi) \leftrightarrow (\neg \forall x \neg \phi)$.
- 2°) $\vdash (\forall x \phi) \leftrightarrow (\neg \exists x \neg \phi)$.

Démonstration.- Considérons la démonstration suivante :

(1) $\phi \rightarrow (\exists x \phi)$	[\exists -substitution]
(2) $(\phi \rightarrow (\exists x \phi)) \rightarrow (\neg \exists x \phi) \rightarrow \neg \phi$	[Contraposition]
(3) $\neg(\exists x \phi) \rightarrow \neg \phi$	[(1), (2) et MP]
(4) $(\neg \exists x \phi) \rightarrow (\forall x \neg \phi)$	[Règle- \forall]
(5) $(\neg \forall x \neg \phi) \rightarrow (\neg \neg \exists x \phi)$	[Contraposition]
(6) $(\neg \forall x \neg \phi) \rightarrow (\exists x \phi)$	[Double-négation]
(7) $(\forall x \neg \phi) \rightarrow (\neg \phi)$	[\forall -substitution]
(8) $(\neg \neg \phi) \rightarrow (\neg \forall x \neg \phi)$	[Contraposition]
(9) $\phi \rightarrow (\neg \forall x \neg \phi)$	[Double-négation]
(10) $(\exists x \phi) \rightarrow (\neg \forall x \neg \phi)$	[Règle- \exists]

On déduit le premier théorème de (6) et de (10).

Le second théorème se déduit de la définition de \forall et du principe d'identité. \diamond

5.5.1.2 Règles de distribution

Proposition 2.- (Règles de distribution)

- 1°) $\vdash \exists x (\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x \phi \vee \exists x \psi)$.
- 2°) $\vdash \forall x (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x \phi \wedge \forall x \psi)$.
- 3°) $\vdash \exists x (\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x \psi \rightarrow \exists x \phi)$.

(1) $(\phi \vee \psi) \rightarrow \exists x (\phi \vee \psi)$	[\exists -substitution]
(2) $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$	[Expansion]
(3) $\phi \rightarrow \exists x (\phi \vee \psi)$	[(1), (2) et transitivité de l'implication]
(4) $\exists x \phi \rightarrow \exists x (\phi \vee \psi)$	[Règle- \exists]
(5) $\exists x \psi \rightarrow \exists x (\phi \vee \psi)$	[Analogie]
(6) $(\exists x \phi \vee \exists x \psi) \rightarrow \exists x (\phi \vee \psi)$	[(4), (5) et logique propositionnelle]
(7) $\phi \rightarrow \exists x \phi$	[\exists -substitution]
(8) $\psi \rightarrow \exists x \psi$	[\exists -substitution]
(9) $(\phi \vee \psi) \rightarrow (\exists x \phi \vee \exists x \psi)$	[(7), (8) et logique propositionnelle]
(10) $\exists x (\phi \vee \psi) \rightarrow (\exists x \phi \vee \exists x \psi)$	[Règle- \exists]

On déduit le premier théorème de (6) et (10).

(1) $\forall x (\phi \wedge \psi) \rightarrow (\phi \wedge \psi)$	[\forall -substitution]
(2) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$	[Logique propositionnelle]
(3) $\forall x (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$	[(1), (2) et transitivité de l'implication]
(4) $\forall x (\phi \wedge \psi) \rightarrow \forall x \phi$	[Règle- \forall]
(5) $\forall x (\phi \wedge \psi) \rightarrow \forall x \psi$	[Analogie]
(6) $\forall x (\phi \wedge \psi) \rightarrow (\forall x \phi \wedge \forall x \psi)$	[Ci-dessus et logique propositionnelle]
(7) $\forall x \phi \rightarrow \phi$	[\forall -substitution]

- (8) $\forall x \psi \rightarrow \psi$ [∀-substitution]
 (9) $(\forall x \phi \wedge \forall x \psi) \rightarrow (\phi \wedge \psi)$ [(7), (8) et logique propositionnelle]
 (10) $(\forall x \phi \wedge \forall x \psi) \rightarrow \forall x (\phi \wedge \psi)$ [Règle-∀]

On déduit le deuxième théorème de (6) et (10).

- (1) $\exists x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \exists x (\neg \phi \vee \psi)$ [Définition de \rightarrow et principe d'identité]
 (2) $\exists x (\neg \phi \vee \psi) \rightarrow (\exists x \neg \phi \vee \exists x \psi)$ [1° ci-dessus]
 (3) $\exists x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x \neg \phi \vee \exists x \psi)$ [(1), (2) et transitivité de l'implication]
 (4) $\exists x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \neg \exists x \neg \phi \vee \exists x \psi)$ [(3) et logique propositionnelle]
 (5) $\exists x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \forall x \phi \vee \exists x \psi)$ [Définition de ∀]
 (6) $\exists x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \phi \rightarrow \exists x \psi)$ [Définition de \rightarrow]
 (7) $(\forall x \phi \rightarrow \exists x \psi) \rightarrow (\neg \forall x \phi \vee \exists x \psi)$ [Définition de \rightarrow et principe d'identité]
 (8) $(\neg \forall x \phi \vee \exists x \psi) \rightarrow (\neg \neg \exists x \neg \phi \vee \exists x \psi)$ [Définition de ∀ et principe d'identité]
 (9) $(\forall x \phi \rightarrow \exists x \psi) \rightarrow (\neg \neg \exists x \neg \phi \vee \exists x \psi)$ [(7), (8) et transitivité de l'implication]
 (10) $(\forall x \phi \rightarrow \exists x \psi) \rightarrow (\exists x \neg \phi \vee \exists x \psi)$ [Double négation et règle d'équivalence]
 (11) $(\exists x \neg \phi \vee \exists x \psi) \rightarrow \exists x (\neg \phi \vee \psi)$ [1° ci-dessus]
 (12) $(\forall x \phi \rightarrow \exists x \psi) \rightarrow \exists x (\neg \phi \vee \psi)$ [(10), (11) et transitivité de l'implication]
 (13) $(\forall x \phi \rightarrow \exists x \psi) \rightarrow \exists x (\phi \rightarrow \psi)$ [Définition de \rightarrow]

On déduit le troisième théorème de (6) et (13). CQFD

Proposition 3.- (Règles de distribution conditionnelle)

Soient ϕ et ψ des formules et x une variable non libre dans ψ . Alors on a :

- 1°) $\vdash \forall x (\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\forall x \phi \vee \psi)$.
- 2°) $\vdash \exists x (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\exists x \phi \wedge \psi)$.
- 3°) $\vdash \forall x (\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\exists x \phi \rightarrow \psi)$.
- 4°) $\vdash \forall x (\psi \vee \phi) \leftrightarrow (\psi \rightarrow \forall x \phi)$.

Démonstration.- 1°) Montrons que $\forall x (\phi \vee \psi) \rightarrow (\forall x \phi \vee \psi)$ par la méthode de l'hypothèse auxiliaire :

- (1) $\forall x (\phi \vee \psi)$ [Hypothèse]
 (2) $\phi \vee \psi$ [(1), particularisation et MP]
 (3) ϕ [Hypothèse auxiliaire]
 (4) $\forall x \phi$ [(3) et généralisation]
 (5) $\forall x \phi \vee \psi$ [(4) et logique propositionnelle]
 (6) ψ [Hypothèse auxiliaire]
 (7) $\forall x \phi \vee \psi$ [(6) et logique propositionnelle]
 (8) $\forall x \phi \vee \psi$ [(2) à (7) et disjonction des cas]

Montrons de même $(\forall x \phi \vee \psi) \rightarrow \forall x (\phi \vee \psi)$:

- (1) $\forall x \phi \vee \psi$ [Hypothèse]
 (2) $\phi \leftrightarrow \forall x \phi$ [Généralisation et particularisation]
 (3) $\phi \vee \psi$ [(1) et équivalence]
 (4) $\forall x (\phi \vee \psi)$ [(3) et généralisation]

2°) résulte du 1°) en utilisant la règle de dualité.

3°), 4°) résultent du 1°) et du 2°) en utilisant la définition de \rightarrow . \diamond

5.5.1.3 Distributivité des quantificateurs

Proposition 4.- Soient ϕ et ψ des formules et x une variable. Si $\phi \rightarrow \psi$ [respectivement $\phi \leftrightarrow \psi$] est un théorème d'une théorie T alors $(\forall x \phi) \rightarrow (\forall x \psi)$ et $(\exists x \phi) \rightarrow (\exists x \psi)$ [respectivement $(\forall x \phi) \leftrightarrow (\forall x \psi)$ et $(\exists x \phi) \leftrightarrow (\exists x \psi)$] sont des théorèmes de T .

Démonstration.- On a :

- | | | |
|-----|-------------------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) | $\phi \rightarrow \psi$ | [Hypothèse] |
| (2) | $\forall x \phi$ | [Hypothèse auxiliaire] |
| (3) | ϕ | [(2) et particularisation] |
| (4) | ψ | [(1), (3) et MP] |
| (5) | $\forall x \psi$ | [(4) et généralisation] |
| (6) | $(\forall x \phi) \rightarrow (\forall x \psi)$ | [Théorème de l'hypothèse auxiliaire] |

Il en résulte que si $\phi \rightarrow \psi$ est un théorème de la théorie T alors $(\forall x \phi) \rightarrow (\forall x \psi)$ est aussi un théorème de T . L'analogue pour le quantificateur existentiel s'obtient à partir de ce résultat et des règles de dualité. On en déduit les résultats pour l'équivalence. CQFD

5.5.1.4 Règles de permutation des quantificateurs

Proposition 5.- Soient ϕ une formule et x et y des variables. Alors on a :

- 1^o) $\vdash \forall x \forall y \phi \leftrightarrow \forall y \forall x \phi$.
- 2^o) $\vdash \exists x \exists y \phi \leftrightarrow \exists y \exists x \phi$.
- 3^o) $\vdash \exists x \forall y \phi \rightarrow \forall y \exists x \phi$.

Démonstration.- On a :

- | | | |
|-----|----------------------------|----------------------------|
| (1) | $\forall x \forall y \phi$ | [Hypothèse auxiliaire] |
| (2) | $\forall y \phi$ | [\forall -substitution] |
| (3) | ϕ | [\forall -substitution] |
| (4) | $\forall x \phi$ | [Généralisation] |
| (5) | $\forall y \forall x \phi$ | [Généralisation] |

D'après la méthode de l'hypothèse auxiliaire, on a donc $\forall x \forall y \phi \rightarrow \forall y \forall x \phi$. On montre de même $\forall y \forall x \phi \rightarrow \forall x \forall y \phi$. D'où le 1^o).

Le 2^o) s'en déduit d'après les règles de dualité.

On a :

- | | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| (1) | $\forall y \phi \rightarrow \phi$ | [\forall -substitution et identité] |
| (2) | $\phi \rightarrow \exists x \phi$ | [\exists -substitution] |
| (3) | $\forall y \phi \rightarrow \exists x \phi$ | [(1), (2) et transitivité de l'implication] |
| (4) | $\exists x \forall y \phi \rightarrow \exists x \phi$ | [Règle- \exists] |
| (5) | $\exists x \phi \rightarrow \forall y \exists x \phi$ | [Généralisation] |
| (6) | $\exists x \forall y \phi \rightarrow \forall y \exists x \phi$ | [(4), (5) et transitivité de l'implication] |

d'où le 3^o). \diamond

Remarque.- Il est inutile d'essayer de déduire $\forall x \exists y \phi \rightarrow \exists y \forall x \phi$ puisque nous avons déjà vu intuitivement que c'est faux.

5.5.1.5 Quantifications relatives

Définition.- Soient A et ϕ des formules et x une variable. On désigne :

- la formule $\exists x (A \wedge \phi)$ par $\exists_A x \phi$,
- et la formule $\neg \exists_A x \neg \phi$ par $\forall_A x \phi$.

Les symboles \exists_A et \forall_A sont appelés des **quantificateurs relatifs**.

Proposition 1.- Soient A et ϕ des formules et x une variable. On a :

$$\vdash (\forall_A x \phi) \leftrightarrow (\forall x (A \rightarrow \phi)).$$

Démonstration.- On a la chaîne d'équivalences suivante :

- | | | |
|-----|--------------------------------------------|----------------------------------------|
| (1) | $\forall_A x \phi$ | |
| (2) | $\neg \exists_A x \neg \phi$ | [Définition de \forall_A] |
| (3) | $\neg \exists x (A \wedge \neg \phi)$ | [Définition de \exists_A] |
| (4) | $\neg \exists x \neg (A \rightarrow \phi)$ | [Logique propositionnelle] |
| (5) | $\forall x (A \rightarrow \phi)$ | [Définition de \forall]. \diamond |

Commentaire.- On a souvent à démontrer des formules de la forme $\forall_A x \phi$. On le fait généralement en s'aidant d'une des deux règles suivantes.

Proposition 2.- Soient A et ϕ des formules et x une variable. Soit T' la théorie obtenue à partir d'une théorie T en adjoignant A aux axiomes propres de T . Si ϕ est un théorème de la théorie T' alors $\forall_A x \phi$ est un théorème de la théorie T .

Démonstration.- On a la démonstration suivante :

- | | | |
|-----|----------------------------------|-------------------------------------|
| (1) | $A \rightarrow \phi$ | [Méthode de l'hypothèse auxiliaire] |
| (2) | $\forall x (A \rightarrow \phi)$ | [Généralisation] |
| (3) | $\forall_A x \phi$ | [P1]. \diamond |

Commentaire.- En pratique on indique qu'on va employer cette règle par une phrase du genre suivant : « Soit x un élément quelconque vérifiant A ». Dans la théorie T' ainsi constituée on cherche à démontrer ϕ . On ne peut naturellement pas affirmer que ϕ soit lui-même un théorème de T .

Proposition 3.- Soient A et ϕ des formules et x une variable. Soit T' la théorie obtenue à partir d'une théorie T en adjoignant A et $\neg \phi$ aux axiomes propres de T . Si la théorie T' est contradictoire alors $\forall_A x \phi$ est un théorème de T .

Démonstration.- En effet la théorie T' est équivalente à la théorie obtenue en adjoignant $\neg(A \rightarrow \phi)$ aux axiomes de T . D'après la méthode de réduction à l'absurde $A \rightarrow \phi$ est un théorème de T , donc aussi $\forall_A x \phi$ d'après la règle de généralisation et P1. \diamond

Commentaires.- 1^o) En pratique on dit : « Supposons qu'il existe un objet x vérifiant A pour lequel ϕ soit fausse » et on cherche à établir une contradiction.

2^o) Les propriétés des quantificateurs relatifs sont analogues à celles des quantificateurs, comme le montrent les règles suivantes.

Proposition 4.- Soient A et ϕ des formules et x une variable. On a :

- 1^o) $\vdash \neg(\forall_A x\phi) \leftrightarrow \exists_A x \neg\phi$.
- 2^o) $\vdash \neg(\exists_A x\phi) \leftrightarrow \forall_A x \neg\phi$.

Proposition 5.- Soient A, ϕ et ψ des formules et x une variable. Si $A \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ [respectivement $A \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi)$] est un théorème d'une théorie T alors il en est de même des formules suivantes : $\exists_A x\phi \rightarrow \exists_A x\psi, \forall_A x\phi \rightarrow \forall_A x\psi$ [respectivement : $\exists_A x\phi \leftrightarrow \exists_A x\psi, \forall_A x\phi \leftrightarrow \forall_A x\psi$].

Proposition 6.- Soient A, ϕ et ψ des formules et x une variable. Alors on a :

- 1^o) $\vdash (\forall_A x)(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall_A x\phi \wedge \forall_A x\psi)$.
- 2^o) $\vdash (\exists_A x)(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists_A x\phi \vee \exists_A x\psi)$.

Proposition 7.- Soient A, ϕ et ψ des formules et x une variable qui ne figure pas dans ϕ . Alors on a :

- 1^o) $\vdash (\forall_A x)(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\phi \vee \forall_A x\psi)$.
- 2^o) $\vdash (\exists_A x)(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\phi \wedge \exists_A x\psi)$.

Proposition 8.- Soient A, B et ϕ des formules et x et y des variables. Si x ne figure pas dans B et si y ne figure pas dans A alors on a :

- 1^o) $\vdash (\forall_A x)(\forall_B y)\phi \leftrightarrow (\forall_B y)(\forall_A x)\phi$.
- 2^o) $\vdash (\exists_A x)(\exists_B y)\phi \leftrightarrow (\exists_B y)(\exists_A x)\phi$.
- 3^o) $\vdash (\exists_A x)(\forall_B y)\phi \rightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)\phi$.

5.6 Un problème métalogue

On s'aperçoit que les axiomes et les règles choisies suffisent pour retrouver ce qui a été dégagé au cours des siècles. Mais nous ne sommes évidemment pas sûrs *a priori* que ce sont les seuls qui méritent le qualificatif de valide (c'est le **problème de la complétude de la logique des prédicats**).