Chapitre 4

La méthode intuitive en logique des prédicats

Nous avons vu qu'un raisonnement est quelque chose de la forme :

$$A, A', ..., A" \therefore B$$

où $A, A', ..., A", B$ sont des propositions (concrètes, non des formes de propositions). Le problème est de déterminer dans quels cas on peut dire que B *se déduit logiquement* de $A, A', ..., A"$.

Ce qui est sûr, déjà, c'est que ce qui est intéressant ce n'est pas la signification de $A, A', ..., A"$ et de B mais leurs formes logiques. Aussi à toute *argumentation concrète* de la forme ci-dessus on associera l'argumentation logique :

$$\hat{A}, \hat{A}', ..., \hat{A}" \therefore \hat{B}$$

où, par exemple, $\hat{A}$ est la formule logique (ou, tout au moins, une formule logique) associée à la proposition A (telle que nous l'avons vue dans le chapitre précédent sur l'analyse des propositions). L'*argumentation concrète* est *valide* si, et seulement si, l'argumentation logique associée est valide. Nous sommes donc ramenés au problème de déterminer quelles sont les argumentations logiques valides.

Nous allons donner une réponse partielle à cette question : nous allons montrer que certaines argumentations sont intuitivement valides, puis nous n'utiliserons que celles-là en logique.

Nous allons donc montrer dans ce chapitre que certaines argumentations sont intuitivement valides, puis nous n'utiliserons que celles-là en logique des prédicats. On s'aperçoit, par l'expérience, qu'elles sont suffisantes dans la vie courante ; mais on n'est pas sûr que ce sont les seules méritant le qualificatif de *valide* (c'est le **problème de la complétude de la logique des prédicats**).

Remarque.- Ainsi, comme en logique propositionnelle, la logique des prédicats ne précède pas tout raisonnement, mais codifie les raisonnements simples et évidents afin de pouvoir s'attaquer à des raisonnements plus complexes.

4.1 Formalisation de la validation des argumentations logiques

Introduction.- Nous avons vu que la méthode des tables de vérité permet de décider de façon systématique si une argumentation propositionnelle est valide (ou non). En logique des prédicats, il existe une généralisation, appelée *méthode des modèles*, de la méthode des tables de vérité, bien que celle-ci ne permette pas de décider de façon systématique si une argumentation de la logique des prédicats est valide (ou non).

Une expression logique fait intervenir un certain nombre de constantes individuelles, de fonctions, de prédicats et de variables libres, le tout en nombre fini. Appelons *langage de la formule* cet ensemble.

Définition.- *On appelle* **langage logique** $\mathcal{L}$ *tout suite finie constituée de symboles de constante d'individu, de symboles de fonction (chacun étant affecté d'une arité), de symboles de relation (chacun étant affecté d'une arité).*

Exemple.- $\mathcal{L} = \{a, f^1, R^2\}$ est un langage logique, où a est un symbole de constante, f un symbole de fonction unaire (remarquez la façon de spécifier l'arité, par un exposant) et R un symbole de relation binaire.

Définition.- *Étant donné un langage logique $\mathcal{L}$, on appelle* **$\mathcal{L}$-formule logique** *toute formule logique dans laquelle n'apparaisse, comme symboles de constante, symbles de fonction et symboles de relation que ceux du langage $\mathcal{L}$.*

Exemple.- La formule logique $\exists x\, R(f(x), a)$ est une $\mathcal{L}$-formule logique par rapport au langage défini ci-dessus alors que $\forall x\, (R(x, y) \land S(y))$ n'en est pas une.

Définition.- *Étant donné un langage logique $\mathcal{L} = \{a_1, \cdots, a_p, f_1^{n_1}, \cdots, f_q^{n_q}, R_1^{m_1}, \cdots, R_r^{m_r}\}$, on appelle* **$\mathcal{L}$-structure logique** *tout $p+q+r+1$-uplet $\mathcal{M} = (D, c_1, \cdots, c_p, g_1, \cdots, g_q, S_1, \cdots, S_r)$, où D est un ensemble non vide* (l'ensemble de base), *c_i un élément de D, g_j une application de D^{n_j} dans D et S_k une relation m_k-aire sur D.*

Exemple.- $\mathcal{M} = (D, p, P)$, où D est l'ensemble des personnes, $p(x)$ signifie « *le père de x* » et $P(x, y)$ signifie « *x est l'un des deux parents de y* », est une $\mathcal{L}$-structure pour le langage défini ci-dessus.

Vocabulaire.- On dit, par exemple, que c_i est l'**interprétation** de a_i dans $\mathcal{M}$, ce que l'on note :

$$(a_i)_{\mathcal{M}} = c_i,$$

ce qui évite d'avoir à se casser la tête à trouver pleins de noms de symboles.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on note de la même façon, par exemple, a_i et c_i.

Introduction 2.- Si Θ est un $\mathcal{L}$-énoncé (c'est-à-dire sans variable libre) et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure alors Θ est vrai ou faux pour cette structure.

Définition.- *Étant donnés $\mathcal{L}$ un langage logique, Θ un $\mathcal{L}$-énoncé et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure logique, on dit que $\mathcal{M}$ est un* **modèle** *de Θ, et on note* :

$$\mathcal{M} \models \Theta$$

si Θ est vrai pour cette structure et :

$$\mathcal{M} \not\models \Theta$$

si Θ est faux pour cette structure.

Exemple.- Pour la structure définie ci-dessus, on a :

$$\mathcal{M} \models \forall x\, P(p(x), x)$$

puisque le père d'une personne est l'un de ses deux parents, mais :

$$\mathcal{M} \not\models \forall x \forall y\, (P(x, y) \rightarrow x = p(y))$$

puisque l'un de ses deux parents peut être sa mère.

Introduction 3.- Ces notions permettent de définir plus finememt la notion d'argumentation valide de la logique des prédicats, de façon analogue à ce que nous avons fait en logique propositionnelle, avec la notion de table de vérité.

Définition.- *Une $\mathcal{L}$-argumentation de la logique des prédicats* :

$$\theta_1, \cdots, \theta_n \therefore \delta,$$

c'est-à-dire telle que $\theta_1, \cdots, \theta_n, \delta$ sont des $\mathcal{L}$-énoncés, est **valide** *si, et seulement si, pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ telle que* :

$$\mathcal{M} \models \theta_1$$
$$\cdots$$
$$\mathcal{M} \models \theta_n$$

on ait également :

$$\mathcal{M} \models \delta$$

Remarque.- Pour des raisons théoriques, mais cela n'intéresse pas la logique élémentaire, on généralise les notion d'*argumentation* et d'*argumentation valide* au cas où $\theta_1, \cdots, \theta_n, \delta$ ne sont pas des énoncés mais des formules logiques avec des variables libres.

Introduction 4.- Cette définition de la validité des argumentations nous permetde montrer qu'une argumentation n'est pas valide en exhibant un modèle des hypothèses qui ne soit pas un modèle de la conclusion, ce qu'on appelle un **contre-exemple**.

Exemple.- L'argumentation logique :

$$\forall x\, P(p(x), x) \therefore \forall x \forall y\, (P(x, y) \rightarrow x = p(y))$$

n'est pas valide puisque nous avons exhibé une structure qui est modèle de l'hypothèse mais pas de la conclusion.

4.2 Lois logiques

4.2.1 Notion de loi logique

Nous cherchons donc à savoir quelles argumentations logiques :

$$A, A', ..., A" \therefore B$$

sont valides. Une première série intéressante de telles argumentations est constituée de celles pour lesquelles il n'y a pas d'hypothèses $A, A', ..., A"$, autrement dit celles de la forme :

$$\therefore B.$$

Dans ce cas ce n'est plus réellement l'argumentation $\therefore B$ qui nous intéresse mais la formule B elle-même.

Définition.- *On appelle* **loi logique** *toute formule logique B telle que* :

$$\vdash B.$$

Remarque.- Une loi logique est une formule logique telle que les propositions associées sont toutes vraies.

Exemples.- 1^o) La formule $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$ est une loi logique, comme nous l'avons vu en logique propositionnelle.

2^o) La formule $(\forall x\, \phi(x)) \rightarrow (\exists x\, \phi(x))$ est une loi logique. En effet, si la formule $\phi(x)$ est vraie pour tout objet x alors il existe au moins un objet pour laquelle elle est vraie, tout au moins si l'univers du discours est non vide, ce que l'on supposera toujours en logique.

Programme.- Nous allons chercher quelques lois logiques, à défaut de les chercher toutes, ou plutôt quelques séries de lois logiques.

4.2.2 À la recherche de lois logiques

Nous allons rechercher des lois logiques, en donnant une application concrète à chaque fois.

4.2.2.1 Tautologies

Soit $f(P, P', ..., P")$ un théorème logique du calcul propositionnel, dont les variables propositionnelles sont $P, P', ..., P"$. Si on remplace ces variables $P, P', ..., P"$ par des énoncés (ou même des formules) $\theta, \theta', ..., \theta"$ alors la formule logique obtenue $f(\theta, \theta', ..., \theta")$ est évidemment une loi logique.

Définition.- *On appelle* **tautologie** *(du calcul des prédicats) toute formule $f(\theta, \theta', ..., \theta")$ obtenue en remplaçant les variables propositionnelles $P, P', ..., P"$ d'un théorème de la logique propositionnelle $f(P, P', ..., P")$ par des formules logiques $\theta, \theta', ..., \theta"$.*

Fait.- *Toute tautologie est une loi logique.*

Commentaire.- Il serait bon de définir précisément la notion de remplacement d'une variable propositionnelle par une formule logique.

Remarque.- Toute loi logique n'est pas une tautologie. En effet, nous avons vu que :

$$(\forall x\, \phi(x)) \rightarrow (\exists x\, \phi(x))$$

est une loi logique, mais elle ne s'obtient pas à partir d'un théorème de la logique propositionnelle.

4.2.2.2 Permutation des quantificateurs de même nature

Si on a une suite de quantificateurs dans une formule, l'ordre de ceux-ci peut avoir ou non de l'importance. Nous allons voir qu'il n'a pas d'importance dans le cas de quantificateurs de même nature (tous existentiels ou tous universels) mais qu'il en a dans le cas de quantificateurs de natures différentes.

Loi 1.- (**Permutation des quantificateurs universels**)

L'ordre des quantificateurs universels n'a pas d'importance, autrement dit si $\phi(x, y)$ est une formule, on a :

$$\vdash \forall x \, \forall y \, \phi(x, y) \leftrightarrow \forall y \, \forall x \, \phi(x, y).$$

Justification.- Les deux formules $\forall x \, \forall y \, \phi(x, y)$ et $\forall y \, \forall x \, \phi(x, y)$ expriment la même chose, à savoir que $\phi(x, y)$ est vrai quels que soient les objets x et y.

Loi 2.- (**Permutation des quantificateurs existentiels**)

L'ordre des quantificateurs existentiels n'a pas d'importance, autrement dit si $\phi(x, y)$ est une formule, on a :

$$\vdash \exists x \, \exists y \, \phi(x, y) \leftrightarrow \exists y \, \exists x \, \phi(x, y).$$

Justification.- Les deux formules $\forall x \, \forall y \, \phi(x, y)$ et $\forall y \, \forall x \, \phi(x, y)$ expriment la même chose, à savoir qu'il existe des objets x et y tels que $\phi(x, y)$ soit vrai.

Remarque.- Si on a un quantificateur universel et un quantificateur existentiel alors leur ordre a une importance. Autrement dit :

$$\forall x \, \exists y \, \phi(x, y) \leftrightarrow \exists y \, \forall x \, \phi(x, y).$$

n'est pas une loi logique

En effet si on prend pour $\phi(x, y)$ la relation d'égalité $x = y$ alors on a $\forall x \, \exists y \, \phi(x, y)$ (pour tout élément x il existe un élément y qui lui est égal, à savoir lui-même), mais on n'a pas $\exists y \, \forall x \, \phi(x, y)$ (il n'existe pas d'élément y tel que tout élément x de l'univers du discours lui soit égal, sauf dans le cas d'un univers du discours à un seul élément).

Introduction.- On vient de voir que l'ordre des quantificateurs de nature différente est important, donc qu'on n'a pas des équivalences. On a cependant une implication.

Loi 3.- *Si $\phi(x, y)$ est une formule on a :*

$$\vdash \exists x \, \forall y \, \phi(x, y) \rightarrow \forall y \, \exists x \, \phi(x, y).$$

Justification.- S'il existe un élément x_0 tel que pour tout élément y on ait $\phi(x_0, y)$ alors pour tout élément y il existe un élément x_y tel que $\phi(x_y, y)$, à savoir $x_y = x_0$.

Remarque.- Nous avons vu ci-dessus que la réciproque est fausse.

4.2.2.3 Quantificateurs et connecteurs

Étudions les rapports entre les quantificateurs et les connecteurs, et en particulier la distributivité.

Loi 1.- (**Dualité des deux sortes de quantificateurs**)
Si $P(x)$ est une formule alors on a :

$$\vdash \forall x\, P(x) \leftrightarrow \neg\exists x\, \neg P(x),$$

et :

$$\vdash \exists x\, P(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg P(x).$$

Justifications.- 1^o) Si la propriété $P(x)$ est vraie quel que soit l'élément x de l'univers du discours alors il ne peut pas y avoir d'élément x vérifiant $\neg P(x)$, puisque pour tout élément x on a soit $P(x)$ soit $\neg P(x)$.

D'autre part, s'il n'existe pas d'élément x tel que $\neg P(x)$ alors c'est que pour tout élément x on a $P(x)$.

2^o) La justification est analogue.

Remarque.- Notons que ces justifications sont pratiquement des paraphrases de ce qui est énoncé formellement. Elles apportent assez peu si on comprend bien ce qui est énoncé.

Loi 2.- (**Distributivité du quantificateur universel par rapport à la conjonction**)
Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des formules alors on a :

$$\vdash \forall x\, [P(x) \land Q(x)] \leftrightarrow [\forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)].$$

Justification.- Dire que pour tout élément x de l'univers du discours les propriétés $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies revient en effet à dire que pour tout élément x de l'univers du discours la propriété $P(x)$ est vraie et que pour tout élément x de l'univers du discours la propriété $Q(x)$ est vraie.

Loi 3.- *Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des formules alors on a :*

$$\vdash [\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)] \rightarrow \forall x\, [P(x) \lor Q(x)].$$

Justification.- Si, par exemple, la propriété $P(x)$ est vraie quel que soit l'élément x de l'univers du discours alors la propriété $P(x)$ ou $Q(x)$ est également vraie quel que soit l'élément x de l'univers du discours.

Remarque fondamentale.- Par contre la réciproque :

$$\forall x\, [P(x) \lor Q(x)] \rightarrow [\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)]$$

n'est pas une loi logique.

En effet si l'univers du discours est l'ensemble des êtres humains, que $P(x)$ signifie « *x est un homme* » et que $Q(x)$ signifie « *x est une femme* », alors l'hypothèse est vraie (tout être humain est soit un homme, soit une femme) mais la conclusion est fausse (on n'a pas soit que tout être humain est un homme, soit que tout être humain est une femme).

Loi 4.- (**Distributivité du quantificateur existentiel par rapport à la disjonction**)

Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des formules alors on a :

$$\vdash \exists x\,[P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow [\exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)].$$

Justification.- Dire qu'il existe un élément x de l'univers du discours tel que la propriété $P(x)$ ou la propriété $Q(x)$ soit vraie revient en effet à dire qu'il existe un élément x de l'univers du discours tel que la propriété $P(x)$ soit vraie ou qu'il existe un élément x de l'univers du discours tel que la propriété $Q(x)$ soit vraie.

Loi 5.- (**Semi-distributivité du quantificateur existentiel par rapport à la conjonction**)

Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des formules alors on a :

$$\vdash \exists x\,[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow [\exists x\,P(x) \wedge \exists x\,Q(x)].$$

Justification.- S'il existe un élément x_0 de l'univers du discours vérifiant $P(x) \wedge Q(x)$ alors on a $P(x_0) \wedge Q(x_0)$, donc on a $P(x_0)$ et $Q(x_0)$, soit $\exists x\,P(x)$ et $\exists x\,Q(x)$, donc $\exists x\,P(x) \wedge \exists x\,Q(x)$.

Remarque fondamentale.- Par contre la réciproque :

$$[\exists x\,P(x) \wedge \exists x\,Q(x)] \rightarrow \exists x\,[P(x) \wedge Q(x)]$$

n'est pas une loi logique.

En effet si l'univers du discours est l'ensemble des êtres humains, si $P(x)$ signifie « *x est un homme* » et si $Q(x)$ signifie « *x est une femme* », alors l'hypothèse est vraie (il existe bien au moins un homme et au moins une femme) mais la conclusion est fausse (il n'existe pas d'être humain qui soit à la fois un homme et une femme).

Cas particulier.- L'équivalence est vraie dans des cas particuliers, par exemple si $P(x)$ ne dépend pas de x.

Loi 6.- *Si P et $Q(x)$ sont des formules, la première n'ayant pas x comme variable libre, alors on a :*

$$\vdash \exists x\,[P \wedge Q(x)] \leftrightarrow [P \wedge \exists x\,Q(x)].$$

Justification.- La condition nécessaire provient de la loi 5. Justifions la condition suffisante. Si la formule $P \wedge \exists x\,Q(x)$ est vraie alors les formules P et $\exists x\,Q(x)$ sont vraies, donc il existe un élément x_0 de l'univers du discours vérifiant $Q(x)$, d'où $P \wedge Q(x_0)$ est vrai, et donc aussi $\exists x\,[P \wedge Q(x)]$.

Loi 7.- *Si P et $Q(x)$ sont des formules, la première n'ayant pas x comme variable libre, alors on a :*

$$\vdash [P \vee \forall x\,Q(x)] \rightarrow \forall x\,[P \vee Q(x)].$$

Justification.- La condition nécessaire résulte de la loi 3. Justifions la condition suffisante. Supposons que pour tout élément de l'univers du discours on ait $P \vee Q(x)$. S'il existe un élément x_0 de l'univers du discours pour lequel $Q(x_0)$ n'est pas vrai, alors, puisque $P \vee Q(x_0)$ est vrai, la formule P est vraie, donc aussi la formule $P \vee \forall x\,Q(x)$. Sinon $Q(x)$ est vrai pour tout élément x de l'univers du discours, donc $\forall x\,Q(x)$ est vrai, donc aussi $P \vee \forall x\,Q(x)$.

4.2.2.4 L'universel implique l'existentiel

Loi.- *Si ϕ est une formule logique, x est une variable et si l'univers du discours est non vide alors :*

$$\vdash (\forall x\, \phi(x)) \rightarrow (\exists x\, \phi(x))$$

est une loi logique.

Justification.- Si la formule $\phi(x)$ est vraie pour tout objet x de l'univers du discours alors il existe au moins un objet pour laquelle elle est vraie, tout au moins si l'univers du discours est non vide.

Hypothèse sur l'univers du discours.- Les cas où il faut supposer l'univers du discours non vide sont si nombreux que nous supposerons désormais toujours que l'univers du discours est non vide.

4.2.2.5 Loi de substitution

Introduction.- Considérons la formule :

$$\forall R(x,y) \wedge S(x,y)$$

On utilise deux variables d'individus dans cette formule, à savoir x et y. D'après la définition que nous avons donnée des variables libres et des variables liées, ces deux variables sont libres.

Nous avons besoin de plus de finesse pour la notion suivante de *substitution*, en considérant non seulement les notions de variable libre et de variable liée, mais également celle d'**occurrence de variable libre** et d'**occurrence de variable liée**. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, la première occurrence de la variable x (à savoir celle apparaissant dans la sous-formule $R(x,y)$, une « occurrence » de variable suivant un signe de quantification n'étant pas considérée comme une occurrence de variable) est liée alors que la seconde (à savoir celle apparaissant dans la sous-formule $S(x,y)$) est libre. Par contre les deux occurrences de la variable y sont libres.

Bien sûr une variable est libre dans une formule s'il existe une occurrence libre de celle-ci dans la formule, ue variable est liée dans une formule si toute occurrence dans la formule est liée.

Définition 1.- *Soient ϕ une formule, x une variable et t un terme. On dit que la formule ψ, que l'on note $(t/x)\,\phi$, est obtenue en* **substituant** *t à x dans ϕ si, et seulement si, on remplace chaque occurrence libre de x dans ϕ par t.*

Exemples.- 1^o) Si ϕ n'a pas d'occurrence libre de x alors la formule $(t/x)\,\phi$ est la formule ϕ elle-même.

2^o) Si ϕ est la formule $(\exists x\, R(x,y)) \wedge S(x)$, où R et S sont des prédicats, alors la formule $(f(x,z)/x)\,\phi$ est la formule $(\exists x\, R(x,y)) \wedge S(f(x,z))$.

Introduction 2.- Si ϕ est une formule et t est un terme alors on peut penser que la formule :

$$(t/x)\,\phi \rightarrow \exists x\,\phi$$

est une loi logique.

En effet il semble exister alors un objet x_0 de l'univers du discours vérifiant $\phi(x_0)$, à savoir celui dénoté par le terme t.

Cependant ceci n'est pas toujours vrai à cause du phénomène insidieux dit de **capture de variable**.

Un exemple de capture de variable.- Considérons comme formule $\phi(x)$ la formule $\forall y\, R(x,y)$, où R est un prédicat, et pour terme t la variable y alors la formule :

$$(t/x)\,\phi \rightarrow \exists x \phi$$

s'écrit :

$$\forall y\, R(y,y) \rightarrow \exists x\, \forall y\, R(x,y)$$

qui est évidemment faux.

Il suffit, pour le montrer, de prendre comme relation R la relation d'égalité : tout élément de l'univers du discours est égal à lui-même mais il n'existe pas d'élément x_0 tel que tout élément soit égal à x_0, sauf si l'univers du discours est un singleton.

Définition 2.- *On dit qu'un* **terme** *t est* **substituable** *à une variable x dans une formule ϕ si, et seulement si, aucune variable de ce terme n'a d'occurence liée dans la formule ϕ.*

Commentaire.- Dans le cas d'un terme substituable le phénomène de capture des variables ne se produit pas. On peut maintenant penser que la variante ci-dessous de la (pseudo-)loi entrevue ci-dessus est vraie.

Loi.- *Si ϕ est une formule, x une variable et t un terme substituable à x dans ϕ alors on a* :

$$\vdash (t/x)\,\phi \rightarrow \exists x\,\phi$$

4.2.2.6 Loi de particularisation

Introduction.- Si ϕ est une formule et t un terme alors on peut penser que la formule :

$$\forall x\,\phi \rightarrow (t/x)\,\phi$$

est une loi logique.

En effet si la propriété $\phi(x)$ est vérifiée pour tout élément x de l'univers du discours alors elle est en particulier vérifiée par son élément dénoté par le terme t.

Cependant ceci n'est pas toujours vrai, toujours à cause du phénomène vu ci-dessus de capture des variables.

Un exemple de capture de variable.- Considérons comme formule $\phi(x)$ la formule $\exists y\,R(x,y)$, où R est un prédicat, et pour terme t la variable y alors la formule :

$$(t/x)\,\phi \rightarrow \exists x\,\phi$$

s'écrit :

$$\forall x\,\exists y\,R(x,y) \rightarrow \exists y\,R(y,y)$$

qui est évidemment fausse.

Il suffit, pour le montrer, de prendre comme relation $R(x,y)$ la relation « *y est le père de x* » et pour univers du discours l'ensemble des êtres humains. L'hypothèse est vraie puisque tout être humain a un père. La conclusion est fausse puisqu'il n'existe pas d'être humain qui soit le père de tous les êtres humains.

Commentaire.- Dans le cas d'un terme substituable, le phénomèe de capture des variables ne se produit pas. On peut maintenant penser que la variant ci-dessous de la (pseudo-)loi entrevue ci-dessus est vraie, comme dans le cas précédent.

Loi.- *Si ϕ est une formule, x une variable et t un terme substituable à x dans ϕ alors on a* :

$$\vdash \forall x\,\phi \rightarrow (t/x)\,\phi$$

4.2.2.7 Renommage des variables liées

Introduction.- Soient $\phi(x)$ une formule et x une variable. Alors on peut penser que les deux formules $\forall x\, \phi(x)$ et $\forall y\, \phi(y)$ expriment la même chose. Mais ceci n'est pas toujours le cas, toujours à cause du phénomène de capture de variable.

Exemple de problème.- Considérons comme univers du discours l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et comme formule $\phi(x)$ la relation d'inégalité $x \geq y$. Alors $\forall x\, \phi(x)$ est une façon d'exprimer la propriété « y est nul » tandis que $\forall y\, \phi(x)$ est un énoncé (vrai, puisque tout entier est plus petit ou égal que lui-même).

Définition.- *Soit ϕ une formule logique. On appelle* **variable fraîche** *par rapport à cette formule toute variable n'ayant occurrence dans ϕ, qu'elle soit libre ou liée.*

Loi.- *Soient ϕ une formule logique, x une variable et y une variable fraîche pour ϕ. Alors on a :*

$$\vdash \forall x\, \phi(x) \rightarrow \forall y\, \phi(y)$$

4.3 Règles d'inférence

4.3.1 Notion de règle d'inférence

<u>Introduction</u>.- Nous avons vu qu'une argumentation est une phrase de la forme :

$$A, A', ..., A" \therefore U$$

où $A, A', ..., A", U$ sont des énoncés. En général il n'est pas immédiat de vérifier si une telle argumentation est valide ou non. Mais on peut avoir des étapes intermédiaires ; par exemple il est immédiat que si :

$$A, A' \vdash U'$$

et qu'on a démontré que A et A' sont des énoncés vrais (dans un modèle donné) alors U' est également un énoncé vrai dans ce modèle. Et, petit à petit, par de telles étapes immédiates, on arrive à la conclusion voulue.

Nous allons donc essayer de dégager de telles argumentations valides immédiates.

<u>Définition</u>.- *On appelle* **règle d'inférence** *toute argumentation valide* :

$$\phi, \psi \vdash \theta,$$

avec une ou deux hypothèses.

<u>But</u>.- Notre but va être maintenant de rechercher des règles d'inférence suffisamment simples pour qu'elles soient acceptées par tout le monde.

4.3.2 À la recherche de règles d'inférence

4.3.2.1 Règle de détachement

Règle.- (**Règle de détachement, ou** *modus ponens*)

Si ϕ et ψ sont des énoncés logiques alors on a :

$$\phi, \phi \to \psi \vdash \psi.$$

Justification.- En effet, si les propositions ϕ et $\phi \to \psi$ sont vraies alors, par définition même de l'implication $\to$ (c'est-à-dire sa table de vérité), la proposition ψ est vraie.

4.3.2.2 Règle d'introduction du quantificateur existentiel

Introduction.-

Remarque.- Si x est libre dans ϕ alors ceci n'est pas vrai, il suffit de considérer la même propriété $P(x)$ pour les deux formules pour s'en rendre compte :

Loi.- *Si ϕ et ψ sont des formules logiques, x une variable qui n'est pas libre dans ψ et si $\phi \to \psi$ est vraie alors $(\exists x\, \phi) \to \psi$ est aussi vraie, autrement dit* :

$$\phi \to \psi \vdash (\exists x\, \phi) \to \psi$$

4.4 Exercices

4.4.1 Lois logiques

Exercice 1.- *Montrer que les énoncés logiques suivants ne sont pas logiquement valides :*

a. $(\forall x\,\phi(x) \rightarrow \forall x\,\psi(x)) \rightarrow \forall x\,(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$

b. $\forall x\,(\phi(x) \vee \phi(x)) \rightarrow (\forall x\,\phi(x) \vee \forall x\,\psi(x))$

Exercice 2.- *Montrer que les énoncés logiques suivants sont logiquement valides :*

a. $\phi(t) \rightarrow \exists x\,\phi(x)$ si t est libre pour x dans ϕ.

b. $\forall x\,\phi \rightarrow \exists x\,\phi$

c. $\forall x\,\forall y\,\phi \rightarrow \forall y\,\forall x\,\phi$

d. $\forall x\,\phi \leftrightarrow \neg(\exists x\,\neg\phi)$

e. $\forall x\,(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\,\phi \rightarrow \forall x\,\psi)$

f. $(\forall x\,\phi \wedge \forall x\,\psi) \leftrightarrow \forall x\,(\phi \wedge \psi)$

g. $(\forall x\,\phi \vee \forall x\,\psi) \rightarrow \forall x\,(\phi \vee \psi)$

h. $\exists x\,\exists\,y\,\phi \leftrightarrow \exists y\,\exists\,x\,\phi$

i. $\exists x\,\forall y\,\phi \rightarrow \forall y\,\exists x\,\phi$

Exercice 3.- *Donner, pour chacun des énoncés suivants, un contre-exemple montrant que ce n'est pas une loi logique :*

a. $[\forall x\,\forall y\,\forall z\,((\phi(x,y) \wedge \phi(y,z)) \rightarrow \phi(x,z)) \wedge \forall x\,\neg\phi(x,x)] \rightarrow \exists x\,\forall y\,\neg\phi(x,y)$

b. $\forall x\,\exists y\,\phi(x,y) \rightarrow \exists y\,\phi(y,y)$

c. $\exists x\,\exists y\,\phi(x,y) \rightarrow \exists y\,\phi(y,y)$

d. $[\exists x\,\phi(x) \leftrightarrow \exists x\,\psi(x)] \rightarrow \forall x\,(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$

e. $\exists x\,(\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\exists x\,\phi(x) \rightarrow \exists x\,\psi(x))$

f. $[\forall x\,\forall y\,(\phi(x,y) \rightarrow \phi(y,x)) \wedge \forall x\,\forall y\,\forall z\,((\phi(x,y) \wedge \phi(y,z)) \rightarrow \phi(x,z))] \rightarrow \forall x\,\phi(x,x)$

g. $\exists x\,\forall y\,((\phi(x,y) \wedge \neg\phi(y,x)) \rightarrow [\phi(x,x) \leftrightarrow \phi(y,y)])$

h. $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\phi(x,x) \wedge (\phi(x,z) \rightarrow (\phi(x,y) \vee \phi(y,z)))) \rightarrow \exists y\,\forall z\,\phi(y,z)$

i. $\exists x\,\forall y\,\exists z\,((\phi(y,z) \rightarrow \phi(x,z)) \rightarrow (\phi(x,x) \rightarrow \phi(y,z)))$

Exercice 4.- *Déterminer si les énoncés suivants sont des lois logiques :*

a. $\neg\exists y\,\forall x\,(\phi(x,y) \rightarrow \neg\phi(x,x))$

b. $[\exists x\,\phi(x) \rightarrow \exists y\,\psi(x)] \rightarrow \exists x\,(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$

c. $\exists x\,(\phi(x) \rightarrow \forall y\,\phi(y))$

d. $\forall x\,(\phi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\forall x\,\phi(x) \vee \forall x\,\psi(x))$

e. $\exists x\,\exists y\,(\phi(x,y) \rightarrow \forall z\,\phi(z,y))$

f. $\exists x\,\exists y\,(\phi(x) \rightarrow \psi(y)) \rightarrow \exists x\,(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$

g.$\forall x\,(\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \neg\forall x\,(\phi(x) \rightarrow \neg\psi(x))$

h. $\exists x\,\phi(x,x) \rightarrow \exists x\exists y\,\phi(x,y)$

i. $(\exists x\,\phi(x) \wedge \exists x\,\psi(x)) \rightarrow \exists x\,(\phi(x) \wedge \psi(x))$

j. $(\forall x\,\phi(x) \vee \forall x\,\psi(x)) \rightarrow \forall x\,(\phi(x) \vee \psi(x))$

4.4.2 Application de la logique des prédicats

Exercice 1.- *En introduisant les notations appropriées, écrire l'argumentation correspondante à chacun des raisonnements suivants et dire si elle est valide (ou non) :*

a. Tous les scientifiques sont neurasthéniques. Aucun végétarien n'est neurasthénique. Donc aucun végétarien n'est scientifique.

b. Tous les hommes sont des animaux. Certains animaux sont carnivores. Donc certains hommes sont carnivores.

c. Certains génies sont célibataires. Certains étudiants ne sont pas célibataires. Donc certains étudiants ne sont pas des génies.

d. Aucun barbier de Trifouillis ne rase exactement les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Donc il n'existe pas de barbier à Trifouillis.

e. Aucun étudiant en géographie n'est plus intelligent qu'aucun des étudiants en histoire. Donc un étudiant en histoire est plus intelligent que n'importe lequel des étudiants en géographie.

f. N'importe quel sain d'esprit peut comprendre les mathématiques. Aucun des fils d'Hegel ne comprend quelque chose aux mathématiques. Aucun fou ne peut voter. Donc aucun fils d'Hegel ne peut voter.