Chapitre 1

Le langage de la logique propositionnelle

Nous avons vu que la logique a pour but de rechercher les moyens de bien raisonner.

La *logique propositionnelle* est une première partie de la logique, qui s'occupe de la combinaison des *propositions*.

L'objet de ce chapitre est d'exhiber le langage de la logique propositionnelle, avant de l'utiliser pour analyser des raisonnements

1.1 Notion de proposition

1.1.1 Proposition et valeurs de vérité

Observation 1.- On appelle couramment *proposition* tout énoncé d'un fait, d'un événement, d'un jugement, d'une pensée. Par exemple :

— Napoléon est né en 1769,
— Napoléon est mort en 1815,
— $2 + 2 = 4$,
— il ne fait pas chaud (sous-entendu à cet instant),
— cette fleur est rouge (en désignant une fleur).

Observation 2.- Ces énoncés sont soit *vrai* (par exemple le premier et le troisième énoncé ci-dessus), soit *faux* (par exemple le deuxième énoncé ci-dessus). Pour certains nous ne savons pas s'ils sont vrais ou faux, pour des raisons diverses (par exemple pour le quatrième énoncé ci-dessus, puisque cela dépend de l'instant auquel on parle et du lieu dans lequel on se trouve ; pour le cinquième, parce que nous ne voyons pas la fleur en question), mais nous savons qu'ils sont soit vrai, soit faux.

La *vérité* ou la *fausseté* d'une proposition est appelée sa *valeur de vérité* ou *valeur logique.*

Observation 3.- Nous n'avons pas défini rigoureusement ce qu'est une *proposition* ou ce qu'est la *valeur de vérité.* Cela parce que nous ne savons pas le faire (essayez !). Nous considérerons donc que ce sont des notions primitives et nous ne donnerons seulement que l'approche heuristique suivante.

Une **proposition** *est une phrase susceptible de recevoir l'une ou l'autre des deux* **valeurs logiques** *suivantes : le* **vrai** *ou le* **faux**.

Exemples.- Voir les exemples ci-dessus.

Contre-exemples.- 1°) « Truc est blond », où Truc n'est pas autrement explicité, n'est pas une proposition, car cette phrase est vraie ou fausse suivant que Truc désigne Pierre, Paul ou Jacques, mais elle n'a pas de valeur de vérité fixe.

2°) Un chien n'est pas une proposition, ce n'est même pas une phrase.

Commentaires.- 1°) Bien que l'approche heuristique précédente de ce qu'est une proposition ne donne lieu à aucune ambiguïté, il faut bien voir que ce n'est pas une définition rigoureuse, et ceci pour deux raisons :

- nous n'avons pas défini ce qu'est une *phrase* de façon précise ;
- il en est de même pour le *vrai* et le *faux* (bien qu'on puisse dire pour le *faux* qu'une proposition est *fausse* si elle n'est pas *vraie*, et donc nous sommes ramenés au seul problème pour le *vrai*).

Malheureusement nous ne savons pas comment faire autrement, et il est même très probable qu'il ne soit pas possible de faire autrement.

2°) Nous avons considéré qu'il n'y a que deux valeurs logiques possibles, le *vrai* et le *faux.* Il peut cependant quelquefois être intéressant d'en faire intervenir d'autres tel que l'*incertain.* Ceci conduit à des **logiques non classiques**, plus particulièrement à des **logiques multivaluées**. Nous ne les considèrerons que plus tard.

1.1.2 Propositions composées

Observation 1.- Considérons la proposition suivante :

Napoléon est né en 1769 et mort en 1815.

Si on connaît un tant soit peu l'histoire de France, on s'exclamera en général que cette proposition est fausse puisque Napoléon n'est pas mort en 1815 mais en 1821. Approfondissons ceci. En fait on peut décomposer cette proposition en deux propositions plus simples liées par le mot *et* :

Napoléon est né en 1769

et :

(Napoléon est) mort en 1815.

On dit alors que la proposition est une **proposition composée**, les deux propositions liées par le mot *et* étant appelées **propositions composantes** et le mot *et* un **connecteur**.

Dans l'analyse du langage, on rencontre ainsi de nombreux connecteurs : *et*, *ou*, *donc*, *car*, *puisque*...

Observation 2.- La signification d'une proposition composée dépend toujours des significations des propositions composantes. Mais, par contre, la valeur logique d'une proposition composée peut souvent se déduire en faisant abstraction de tout contenu de pensée et seulement des valeurs de vérité des propositions composantes.

Par exemple soient deux propositions, que nous noterons symboliquement respectivement par P et par Q. Il est clair que, dans le langage courant, la proposition « P et Q » est vraie si, et seulement si, les deux propositions P et Q sont vraies à la fois, et fausse sinon.

Un connecteur est dit **connecteur logique** *si, et seulement si, la valeur de vérité de la proposition composée ne dépend que des valeurs logiques des propositions composantes.*

Remarque.- Il existe des connecteurs qui ne sont pas des connecteurs logiques. Par exemple le connecteur *parce que*, qui sous-entend une relation de cause à effet. Tout le monde est d'accord pour dire que la proposition suivante est vraie :

Louis XVI est mort parce qu'il eut la tête tranchée

et celle-ci est de la forme P **parce que** Q, où P et Q sont vraies.

Par contre tout le monde s'accordera à dire que la proposition suivante est fausse :

Louis XVI est mort parce que 2 + 2 = 4

et pourtant elle est bien de la forme P parce que Q, avec P et Q vraies.

Ainsi le connecteur « parce que » n'est pas un connecteur logique.

Conclusion.- On peut distinguer deux sortes de vérité :

- la **vérité matérielle** comme, par exemple, celle qui est attachée au fait que Napoléon est né en 1769 et qui est apprise par la science historique (dans ce cas), et par diverses matières en général ;

- la **vérité combinatoire** (ou **formelle**) : par exemple la proposition « P et Q » est vraie si, et seulement si, P et Q sont vraies à la fois, fausse sinon.

L'objet de la **logique propositionnelle** est d'étudier la vérité combinatoire, c'est-à-dire de déterminer dans quels cas une proposition composée est vraie, connaissant les valeurs de vérité des propositions composantes et les connecteurs logiques utilisés.

Commentaire.- Comment reconnaissons-nous la vérité matérielle d'une proposition ?

Tout le monde est d'accord sur le fait que « Napoléon est né en 1769 » est une proposition vraie. Pourquoi ? Ceci est un sujet délicat qui n'appartient pas à la logique, mais en l'occurrence à la *méthode historique*. La discipline philosophique appelée **théorie de la connaissance** a pour but de critiquer les méthodes, telle que la méthode historique, pour déterminer si elles conduisent à des vérités matérielles (ou non).

Convention.- Dans la suite nous dirons toujours « connecteur » pour « connecteur logique », puisque nous ne nous intéresserons ici qu'à ceux-là.

1.2 Les connecteurs naturels

Nous venons de voir la notion de connecteur (logique). Nous allons maintenant rechercher, de façon exhaustive, les connecteurs utilisés à travers le langage, qui reflètent la logique propositionnelle inconsciente de notre civilisation.

1.2.1 La négation

<u>Définition</u>.- Dans les cours de grammaire on apprend à nier les propositions. À chaque proposition P on associe une autre proposition, appelée la **négation** de P, que nous désignerons par non-P. Le passage de P à non-P est régi par un ensemble de règles grammaticales qui dépendent de la langue utilisée et de la forme de P. Mais l'intention de cette opération réside en ce que non-P est fausse quand P est vraie, et vraie quand P est fausse.

Nous pouvons résumer cette situation par le tableau suivant :

P	non-P
vrai	faux
faux	vrai

appelé **table de vérité** de la négation.

<u>Exemple</u>.- Par exemple si P est :

Napoléon est né en 1769

sa négation, non-P, est :

Napoléon n'est pas né en 1769.

Dans ce cas, P est vraie, non-P est fausse.

1.2.2 La conjonction

<u>Définition</u>.- Nous avons déjà vu que le mot « et » peut servir de connecteur logique reliant deux propositions, disons P et Q, pour former une proposition notée « P et Q », et appelée la **conjonction** de P et de Q.

La proposition P et Q est vraie si, et seulement si, les propositions P et Q sont vraies à la fois, fausse sinon. Ceci peut se résumer par le tableau suivant :

P	Q	P et Q
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux
faux	faux	faux

appelé *table de vérité de la conjonction.*

<u>Remarque</u>.- Le mot « et » sert souvent de connecteur logique dans le langage courant mais il sert aussi quelquefois, et cela montre toute l'ambiguïté des langues naturelles, de connecteur non logique en sous-entendant une notion de séquence, comme par exemple, dans la phrase :

Il mourut et tomba

différente, du point de vue de la vérité, de la phrase :

Il tomba et mourut

alors que pour le connecteur logique « et », les deux propositions composées « P et Q » et « Q et P » ont la même valeur de vérité.

1.2.3 La disjonction

Observation.- L'usage du mot « ou » est ambigu en français. Le plus souvent « P ou Q » signifie qu'au moins une des propositions P ou Q est vraie, bien que P et Q peuvent être vraies à la fois, comme dans la phrase :

À la fête vous pouvez monter dans les auto-tamponneuses ou jouer à la loterie

(vous pouvez faire les deux). On parle alors de l'usage **inclusif** du mot « ou », ou du **ou inclusif**.

On rencontre aussi cependant un usage **exclusif** du mot « ou », comme lorsque sur le menu d'un restaurant on voit écrit :

fromage ou dessert

(abréviation de « vous avez droit à du fromage ou à un dessert, mais pas aux deux »).

Dans certaines langues il existe deux mots différents pour ces deux usages différents. Par exemple, en latin « vel » est utilisé dans le sens inclusif tandis que « aut » est utilisé dans le sens exclusif. Mais ce n'est pas le cas en français.

Les mathématiciens, par souci de précision, ont pris l'habitude de n'employer le mot « ou » que dans son sens inclusif. Dans un texte ordinaire, le contexte suffit en général pour qu'on sache si un « ou » est inclusif ou exclusif. Dans un texte mathématique, les objets seront trop abstraits pour cela, d'où cette précaution.

Définition.- La **disjonction** de deux propositions P et Q est la proposition composée, notée « P ou Q », qui est fausse si, et seulement si, les propositions P et Q sont fausses à la fois, et qui est vraie sinon. Ceci peut se résumer par le tableau suivant :

P	Q	P ou Q
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	vrai
faux	vrai	vrai
faux	faux	faux

appelé *table de vérité de la disjonction.*

Remarque.- Le **ou exclusif** est également un connecteur logique, noté **ex**, que nous emploierons peu pour des raisons que nous verrons plus tard, et dont la table de vérité est la suivante :

P	Q	P ex Q
vrai	vrai	faux
vrai	faux	vrai
faux	vrai	vrai
faux	faux	faux

1.2.4 L'implication

Introduction.- Des propositions de la forme « Si P alors Q » apparaissent si souvent qu'il est nécessaire de considérer « si ... alors ... » comme un connecteur logique. Il est évident que, lorsque P est vraie et Q est fausse, alors « Si P alors Q » doit être fausse. Mais c'est à peu près tout ce qu'on peut dire de façon naturelle.

Connecteur ou connecteur logique ?- En fait dans les langues naturelles telles que le français, une expression du genre « Si P alors Q » n'est acceptée que si Q a un rapport, quant à la signification, avec P. Par exemple une expression telle que :

Si le prix du litre de lait est de 1 euro alors Londres est la capitale de la France

nous apparaît comme n'ayant pas beaucoup de sens, sinon une plaisanterie. Cependant si nous voulons considérer « Si ... alors ... » comme un connecteur logique, nous devons lui donner sinon un sens au moins une valeur logique.

Définition.- On appelle **implication** le connecteur logique « si P alors Q » qui prend la valeur faux si, et seulement si, P est vraie et Q est fausse. Ceci peut se résumer par le tableau suivant :

P	Q	si P alors Q
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai
faux	faux	vrai

appelé *table de vérité de l'implication.*

Problème de la détermination de la table de vérité de l'implication.- La définition est une définition et donc, comme pour toute définition, nous n'avons rien à y redire, car elle peut être aussi arbitraire que l'on veut. Mais en fait, comme la deuxième ligne de la table de vérité est justifiée par ce que nous avons dit en introduction, on peut également justifier les autres lignes.

Nous allons voir que si nous voulons que ce soit un connecteur logique alors nous n'avons pas vraiment le choix.

Considérons la proposition « Si (P et Q) alors P ». Elle nous semble intuitivement toujours vraie, quelles que soient les valeurs de vérité de P et de Q.

- Considérons le cas où P et Q sont toutes les deux vraies. Alors « P et Q » et P sont toutes les deux des propositions vraies. Ceci implique que la valeur de vérité de la première ligne de la table de vérité doit être le vrai.
- Quand P est vraie et Q est fausse alors « P et Q » est fausse et P est vraie. Ainsi la valeur de vérité de la troisième ligne de la table de vérité doit être le vrai.
- Quand P est fausse et Q est vraie alors « P et Q » est fausse et P est fausse. Ainsi la valeur de vérité de la quatrième ligne de la table de vérité doit être le vrai.

Synonymes dans le langage courant.- Le « si P alors Q » a des synonymes dans le langage courant, par exemple « P implique Q », « Q est conséquence de P », « Q est impliqué par P »...

Vocabulaire.- Dans une proposition composée de la forme « P implique Q », la proposition P s'appelle la **prémisse** ou l'**antécédent** et la proposition Q le **conséquent**.

1.2.5 L'équivalence

Observation.- Le dernier connecteur que nous considèrerons est celui qui correspond à la liaison *si, et seulement si* comme, par exemple, dans la proposition composée suivante :

C'est monsieur Martin (qui arrive) si, et seulement si, il porte un costume clair.

Tout le monde sera d'accord pour dire qu'une proposition composée de la forme « P si, et seulement si Q » est vraie si, et seulement si, les propositions P et Q sont vraies à la fois ou fausses à la fois.

Définition.- On appelle **équivalence** le connecteur logique « P si, et seulement si, Q » qui prend la valeur vraie si, et seulement si, P et Q sont vraies à la fois ou fausses à la fois. Ceci peut se résumer par le tableau suivant :

P	Q	P si, et seulement si, Q
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux
faux	faux	vrai

appelé *table de vérité de l'équivalence.*

Connecteur ou connecteur logique ?- En fait dans les langues naturelles telles que le français, et comme pour l'implication, une expression du genre « P si, et seulement si, Q » n'est acceptée que si Q a un rapport, quant à la signification, avec P. Nous considèrerons, dans la suite, que la signification n'intervient pas.

Synonymes dans le langage courant.- Le « P si, et seulement si, Q » a des synonymes dans le langage courant, par exemple « P est équivalent à Q ».

1.2.6 Autres connecteurs ?

Problème.- Nous avons étudié cinq connecteurs (la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence), et même six avec la disjonction exclusive. En existe-t-il d'autres ?

La réponse dépend de ce que nous entendons par là :

- Si nous voulons dire d'autres connecteurs apparaissant dans le langage courant, ou dont on a besoin dans la pratique, alors il semble bien qu'il n'en existe pas d'autres.

- Si nous voulons dire d'autres connecteurs théoriques (définis par leur table de vérité), alors il en existe beaucoup d'autres. Par exemple, rien que pour les connecteurs reliant deux propositions (nous avons vu qu'ils peuvent ne relier qu'une seule proposition, comme dans le cas de la négation, et on peut en imaginer qui relient trois propositions ou même plus), nous n'avons pas donné de nom au connecteur correspondant à la table de vérité suivante :

P	Q	
vrai	vrai	faux
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux
faux	faux	vrai

Nous verrons cependant plus tard qu'il est inutile de lui donner un nom, car on le retrouve comme « combinaison » des connecteurs précédents. Nous verrons en fait qu'il en est ainsi pour tous les autres connecteurs théoriques.

1.2.7 Conclusion : le renversement logique

Ainsi des faits courants nous ont conduit à dégager les notions de *proposition*, de *valeur de vérité*, de *connecteur* (logique) et cinq connecteurs particuliers. Nous avons vu aussi que ces notions restent assez vagues dans la vie courante et que quelquefois il y a quelques ambiguïtés à choisir la table de vérité d'un connecteur naturel donné. Dans la suite nous ne travaillerons plus sur ces notions vagues. La logique recherche des lois mais est aussi normative : on décide que, désormais, lorsque nous nous servirons des notions vues précédemment, ce sera toujours au sens des définitions non ambiguës données ci-dessus. La vie courante a seulement inspiré un vocabulaire qui est maintenant utilisé dans un sens précis.

Cela ne posera pas de problème pour analyser un discours scientifique, puisque tout scientifique doit avoir reçu une formation en logique. Mais cela pourra peut-être en poser pour analyser d'autres discours ; il faudra alors d'abord vérifier que les mots ont bien la même signification.

1.3 Expression logique

1.3.1 Notion

Proposition composée complexe.- Nous avons vu que certaines propositions peuvent être considérées comme composées, et nous avons étudié les connecteurs courants. Il peut arriver que, dans une proposition composée, il intervienne plus d'un connecteur.

Considérons, par exemple, la proposition suivante :

Si Pierre a son bac et Paul est libre, alors nous partirons en vacances en juillet.

Visiblement trois propositions simples interviennent dans cette proposition composée, à savoir :

P Pierre a son bac
Q Paul est libre
R nous partirons en vacances en juillet.

Forme d'une telle proposition.- La forme de cette proposition est :

si (P et Q) alors R.

Intérêt des parenthèses.- Des parenthèses ont été placées pour éviter toute ambiguïté avec, par exemple, la forme :

P et (si Q alors R),

correspondant, par exemple, à la proposition :

Pierre a son bac et, si Paul est libre, alors nous partirons en vacances en juillet,

qui est nettement différente, à la fois du point de vue logique et du point de vue de la signification, de la première proposition considérée.

1.3.2 Évaluation d'une proposition composée complexe

Définition.- **Évaluer une proposition composée**, c'est donner sa valeur de vérité connaissant les valeurs de vérité de ses propositions composantes (en général atomiques).

Méthode.- La méthode pour évaluer une proposition composée complexe est simple et systématique :

- 1^o) On cherche la forme de cette proposition composée ;
- 2^o) On détermine les valeurs de vérité des propositions composantes, ce qui n'est pas un problème de logique, comme nous l'avons déjà vu ;
- 3^o) On se sert des tables de vérité des connecteurs et, en progressant pas à pas, on obtient la valeur de vérité de la proposition.

Exemple.- Considérons la première proposition ci-dessus. Supposons que P soit vraie, Q soit fausse et que R soit vraie. Alors (P et Q) est fausse donc si (P et Q) alors R est vraie. Il n'est donc pas nécessaire que Pierre ait son bac pour partir en vacances.

Utilité de la forme.- En logique propositionnelle la seule chose que l'on veuille savoir sur une proposition est sa valeur de vérité, et donc seule la forme a un intérêt. On s'intéressera donc essentiellement à la forme des propositions composées. On parle de **logique formelle**.

1.4 Le raisonnement propositionnel

Nous avons vu que la meilleure méthode pour convaincre quelqu'un qu'une assertion est vraie est de faire un *raisonnement*, c'est-à-dire de partir d'un certain nombre de propositions acceptées comme vraies et de montrer alors que la proposition que l'on veut faire admettre *s'en déduit logiquement*, c'est-à-dire qu'il est tout à fait clair qu'on doit alors accepter cette proposition.

Que faut-il entendre par « s'en déduit logiquement » ?

Bien souvent cela paraît clair. Nous allons cependant l'expliciter à partir de notre notion intuitive à l'égard des objets de la logique propositionnelle que nous venons de dégager, et donc voir en quoi consiste un bon raisonnement, ou tout au moins certains types de raisonnement, ceux qui correspondent à la logique propositionnelle.

1.4.1 Argumentation propositionnelle

Commençons par donner quelques exemples de raisonnement.

Exemples.- 1^o) Pierre est le frère de Paul.
Si Pierre est le frère de Paul alors Pierre est plus âgé que Paul.
Donc Pierre est plus âgé que Paul.

2^o) Si Marie est à Rome alors il en est de même de Pierre.
Si Pierre est à Rome alors Jacques n'y est pas.
Donc Si Marie est à Rome alors Jacques n'y est pas.

Forme d'un raisonnement.- On sent bien que, dans ce genre de raisonnement, ce n'est pas le contenu des propositions qui compte, mais leur forme. Les formes attachées aux raisonnements ci-dessus sont :

- 1^o) P
si P alors Q
Donc Q

- 2^o) si P alors Q
si Q alors R
Donc si P alors R

Le « donc » annonce la *conclusion* de notre raisonnement. On ne sait pas par quoi le remplacer jusqu'ici. Il correspond donc à une notion nouvelle.

Définition.- Si A, A', ... , A", B sont des expressions logiques, on appelle **argumentation** toute phrase du genre :

$$A, A', \ldots, A" \textit{ donc } B,$$

noté :

$$A, A', \ldots, A" \therefore B.$$

Remarque.- Nous appelons *argumentation* la forme d'un raisonnement (bon ou mauvais), formalisable dans le calcul propositionnel. Remarquons cependant qu'il existe des raisonnements qui ne sont pas formalisables dans le calcul propositionnel, tel que le suivant :

Socrate est un homme.
Tout homme est mortel.
Donc Socrate est mortel.

1.4.2 Argumentation valide

À tout raisonnement nous avons associé une *forme de raisonnement*, appelée ici *argumentation*. Cependant il existe des raisonnements valables et des raisonnements fallacieux. Nous ne nous occuperons que des raisonnements valables, évidemment ; la forme d'un tel raisonnement est appelée une **argumentation valide**.

Exemple de raisonnement fallacieux.- Considérons le raisonnement suivant :

Si Pierre a son bac alors nous partirons en vacances en juillet.
Pierre n'a pas son bac.
Donc nous ne partirons pas en vacances en juillet.

Il ressemble à un raisonnement correct. Sa forme est la suivante :

si P alors Q
non P
Donc non Q

Cependant ce raisonnement n'est pas correct comme on peut s'en rendre compte en remplaçant P et Q respectivement par les propositions suivantes :

$1 + 1 = 3$
et
$2 + 2 = 4$.

Notation.- Pour indiquer qu'une argumentation :

$$A, A', ..., A" \therefore B$$

est valide on note :

$$A, A', ..., A" \vdash B$$

Problème fondamental de la logique élémentaire.- *Quelles sont les argumentations valides ?*

Nous avons une notion intuitive de ce qu'est une argumentation valide, mais pouvons-nous en donner une définition formelle ? Pouvons-nous donner un moyen pour les reconnaître à coup sûr ?

Remarque.- Ainsi la logique propositionnelle ne précède pas tout raisonnement, mais codifie les raisonnements simples et évidents afin de pouvoir s'attaquer à des raisonnements plus complexes.

1.5 Définition formelle du langage de la logique propositionnelle

Nous avons dit qu'une *expression logique* est la forme de proposition composée (complexe). Mais, pour l'instant, nous sommes restés sur une notion intuitive de ces concepts. Nous allons être plus clair en donnant une définition formelle.

1.5.1 Définitions

Variables propositionnelles.- Jusqu'ici, lorsqu'on utilisait une lettre majuscule telle que P, Q, R, S par exemple, c'était en tant qu'abréviation (ou nom) d'une proposition donnée. En fait on peut aller plus loin dans l'abstraction lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la forme des propositions. La notation P peut désigner une proposition *a priori* indéterminée. On dira alors que P est une **variable propositionnelle**.

Signes pour les connecteurs logiques.- Pour l'instant, pour désigner un connecteur logique (naturel), nous avons choisi un des mots du langage courant qui le désigne. Comme pour les opérations arithmétiques (on utilise le signe « + » au lieu de « plus ») on utilise des signes pour les connecteurs naturels suivant le tableau ci-dessous :

- signe de négation : $\neg$; alors $\neg P$ se lit non-P.
- signe de disjonction : $\vee$; alors $P \vee Q$ se lit P ou Q.
- signe de conjonction : $\wedge$; alors $P \wedge Q$ se lit P et Q.
- signe d'implication : $\rightarrow$; alors $P \rightarrow Q$ se lit P implique Q.
- signe d'équivalence : $\leftrightarrow$; alors $P \leftrightarrow Q$ se lit P équivalent à Q.

Introduction.- Quelques exemples d'expressions logiques sont alors :

$$(P \vee Q) \wedge R$$

$$\neg P \rightarrow Q.$$

Une expression logique est donc un *mot* sur l'alphabet formé des variables propositionnelles, des signes de connecteurs logiques et des parenthèses ouvrante et fermante. Cependant tout tel mot n'est pas une expression logique. Par exemple PQ ou $(P \wedge Q \vee R$ ne sont pas des expressions logiques : pour le premier mot aucun connecteur ne relie les variables propositionnelles ; pour le second, d'une part, une parenthèse est ouverte sans être fermée et, d'autre part, il y a ambiguïté sur le connecteur qui doit être considéré en premier, autrement veut-on dire $(P \wedge Q) \vee R$ ou $(P \wedge (Q \vee R))$?

On peut cependant définir l'ensemble des expressions logiques de façon claire en utilisant la définition suivante.

Définition.- *L'ensemble des* **expressions logiques** (**propositionnelles**) *est défini de la façon suivante :*

- 1^o) *Les variables propositionnelles* P, Q, R, ... *sont des expressions logiques* ;
- 2^o) *Si A est une expression logique alors il en est de même de $\neg A$* ;
- 3^o) *Si A et B sont des expressions logiques alors il en est de même de $(A \vee B)$, de $(A \wedge B)$, de $(A \rightarrow B)$ et de $(A \leftrightarrow B)$* ;
- 4^o) *Toutes les expressions logiques sont obtenues de cette façon.*

Remarques.- 1^o) La condition 1^o) peut poser problème. Que signifient les points de suspension « ... » ? On peut considérer que ce sont les lettres indiquées mais lorsqu'on a besoin d'être précis ou lorsqu'il n'y en a pas assez, on peut considérer que ce sont P, P', P", P"', P"", ... avec autant de prime que l'on veut.

2^o) Les symboles A et B utilisés dans les conditions 2^o) et 3^o) ne sont pas des variables propositionnelles : on peut les remplacer par n'importe quelle expression logique. On parle de **métavariables propositionnelles**.

3^o) Il ne s'agit pas d'une définition au sens habituel : dans une telle définition, Blaise Pascal a insité sur le fait que le mot que l'on veut définir ne doit pas intervenir dans la partie de la phrase servant à le définir ; or ici le mot 'expression' apparaît dans les parties gauches du 2^o) et du 3^o). On parle de **définition inductive** ou **récursive**.

4^o) On définit bien ainsi toutes les formes possibles de propositions composées. Réciproquement, toute proposition correspond bien à une forme de proposition, ne serait-ce qu'à la forme P.

5^o) Toute proposition aura une forme donnée (à quelques variations non essentielles près) si on oblige les variables propositionnelles P, Q, R, ... à représenter des **propositions atomiques**, c'est-à-dire que l'on ne peut plus décomposer du point de vue de la logique propositionnelle.

Par exemple la forme de la proposition déjà considérée :

Si Pierre a son bac et Paul est libre, alors nous partirons en vacances en juillet.

a pour forme fondamentale :

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

mais aussi :

$$S \rightarrow R.$$

1.5.2 Élimination des parenthèses

Introduction.- Nous avons vu l'intérêt d'utiliser les parenthèses pour l'écriture des expressions logiques, afin d'éviter les ambiguïtés. La nécessité de donner une définition simple de l'ensemble des expressions logiques nous a obligé à exiger qu'une expression comporte beaucoup plus de parenthèses que nécessaire. Par exemple :

$$(((A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg A)) \wedge A)$$

est beaucoup moins lisible que :

$$(A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg A) \wedge A$$

mais ce dernier mot n'est pas une expression logique au sens de la définition donnée (bien qu'il le soit au sens intuitif).

On dira que la première expression est **complètement parenthésée** et on acceptera des expressions **simplement parenthésées** en utilisant, par exemple, les règles suivantes.

Conventions d'omissions des parenthèses.- 1^o) On peut omettre la paire extérieure de parenthèses, lorsqu'elle existe.

Nous écrirons ainsi, par exemple, $(A \vee B) \wedge \neg C$ au lieu de $((A \vee B) \wedge \neg C)$.

Remarquons cependant que $\neg((A \vee B) \wedge \neg C)$ n'a pas de paire extérieure de parenthèses dès l'origine.

2^o) On notera $U \vee V \vee ... \vee T$ au lieu de $((U \vee V) \vee ...) \vee T$.

On notera $U \wedge V \wedge ... \wedge T$ au lieu de $((U \wedge V) \wedge ...) \wedge T$.

1.5.3 Loi d'induction pour les expressions logiques

Il résulte intuitivement de la définition des expressions logiques (propositionnelles), et en particulier du 4^o), que l'on a la loi suivante, appelée **loi d'induction pour les expressions logiques**.

Loi.- *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'expressions logiques tel que :*

- 1^o) *Toutes les variables propositionnelles appartiennent à $\mathcal{A}$;*
- 2^o) *Si A appartient à $\mathcal{A}$ alors il en est de même de $\neg A$;*
- 3^o) *Si A et B appartiennent à $\mathcal{A}$ alors il en est de même de $(A \vee B)$, de $(A \wedge B)$, de $(A \longrightarrow B)$ et de $(A \longleftrightarrow B)$.*

Alors $\mathcal{A}$ est l'ensemble de toutes les expressions logiques.

1.6 Exercices

Exercice 1.- *Éliminez le maximum de parenthèses possibles des expressions logiques suivantes complètement parenthésées pour obtenir des expressions logiques simplement parenthésées* :

a. $((B \rightarrow (\neg A)) \wedge C)$
b. $(A \vee (B \vee C))$
c. $(((A \wedge (\neg B)) \wedge C) \vee D)$
d. $((B \vee (\neg C)) \vee (A \wedge B))$
e. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(C \vee D)))$
f. $((\neg(\neg(\neg(B \vee C)))) \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$
g. $(\neg(\neg(\neg(B \vee C))) \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)))$
h. $((((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)) \wedge (\neg A)) \vee C)$

Exercice 2.- *L'imprimante a malencontreusement supprimé les paires de parenthèses d'expressions logiques, ce qui donne les pseudo-expressions suivantes. Restaurer les parenthèses pour obtenir des expressions logiques parenthésées (il peut y avoir plusieurs résultats dans chaque cas)* :

a. $C \vee \neg A \wedge B$
b. $B \rightarrow \neg\neg\neg A \wedge C$
c. $C \rightarrow \neg(A \wedge B \rightarrow C) \wedge A \leftrightarrow B$
d. $C \rightarrow A \rightarrow A \leftrightarrow \neg A \vee B$

Exercice 3.- *Déterminez si les pseudo-expressions suivantes sont des expressions logiques, simplement ou complètement parenthésées, et, s'il en est ainsi, restaurer toutes les parenthèses* :

a. $\neg\neg A \leftrightarrow A \leftrightarrow B \vee C$
b. $\neg(\neg A \leftrightarrow A) \leftrightarrow B \vee C$
c. $\neg(A \leftrightarrow B) \vee C \vee D \rightarrow B$
d. $A \leftrightarrow (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge (B \vee C)))$
e. $\neg A \vee B \vee C \wedge D \rightarrow A \wedge \neg A$
f. $((A \rightarrow B \wedge (C \vee D) \wedge (A \vee D))$